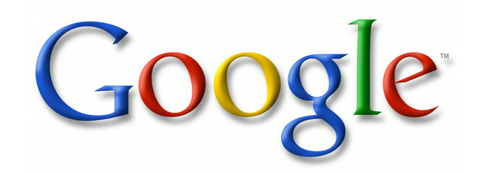


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

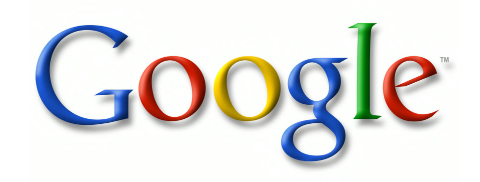
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

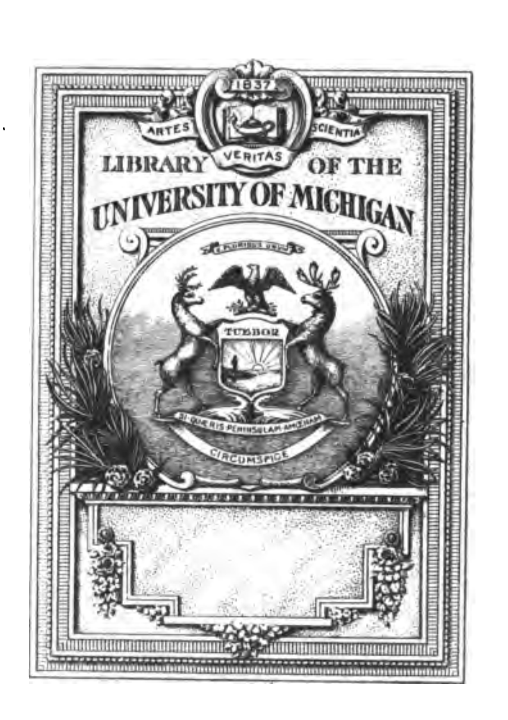
Nous vous demandons également de:

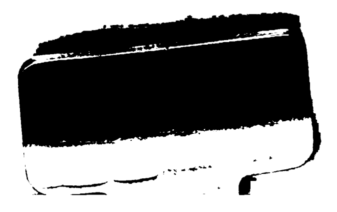
+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

B 470336


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



Mathematics
QA
1
I55

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS.

PRIX DE L'ABONNEMENT ANNUEL (12 NUMÉROS)

Paris.................. 7 fr. | Dép. et Union postale... 8 fr. 50

Les douze numéros forment chaque année un Volume de 300 pages au moins.

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS

FONDÉ EN 1894 PAR C.-A. LAISANT ET ÉMILE LEMOINE

DIRECTEUR-FONDATEUR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Ancien Examinateur à l'École Polytechnique.

DIRECTEURS-RÉDACTEURS

Ed. MAILLET,
Docteur ès Sciences,
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées,
Examinateur des Élèves a l'École Polytechnique.

A. MALUSKI,
Agrégé de Mathématiques,
Ancien Elève de l'École Normale supérieure,
Proviseur du Lycée de Sceaux.

A. BOULANGER,
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers,
Répétiteur et Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

Publication honorée d'une souscription du Ministère de l'Instruction publique.

TOME XXVII. — 1920.

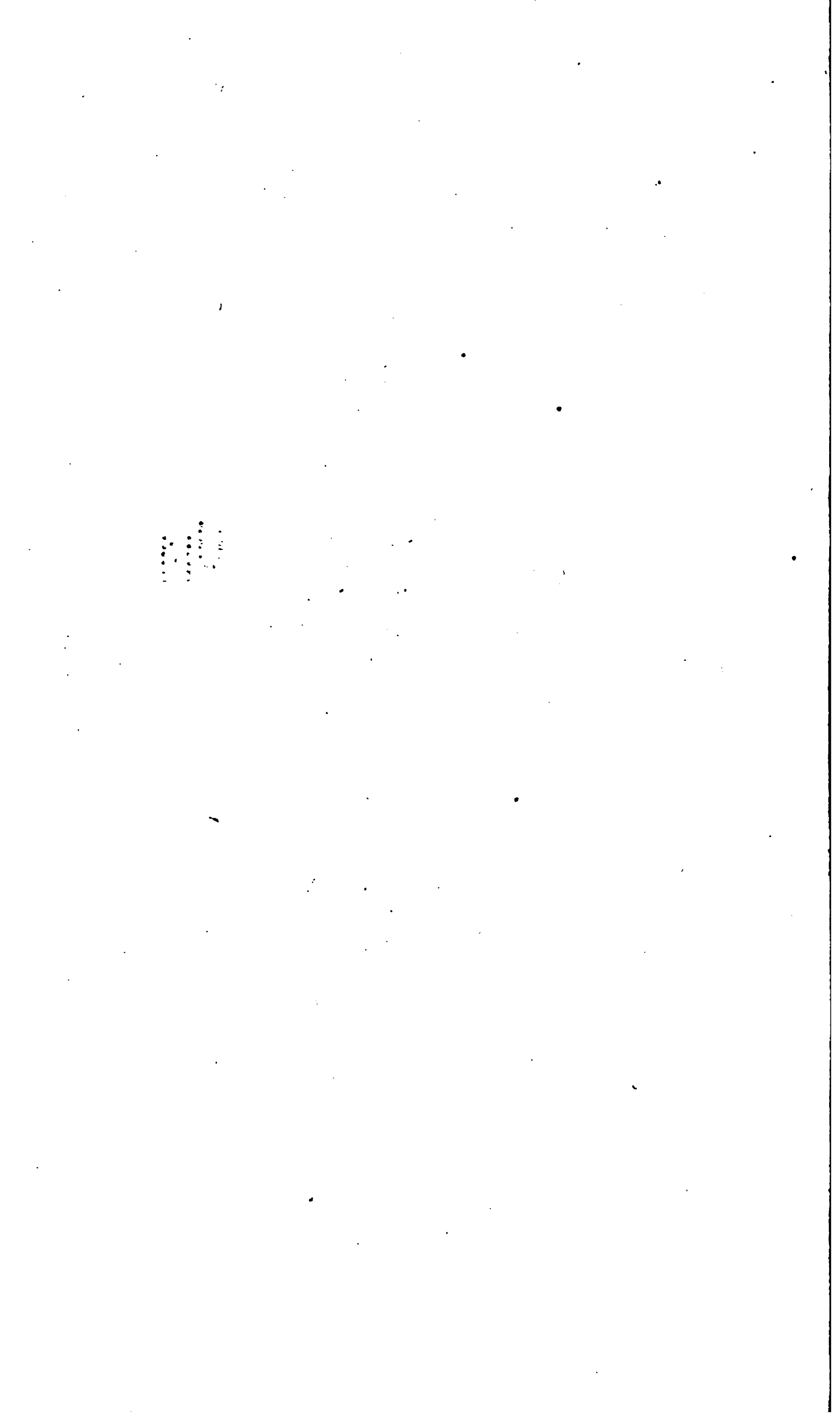
PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1920



0.5
596

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS

FONDÉ EN 1894 PAR C.-A. LAISANT ET ÉMILE LEMOINE

DIRECTEUR-FONDATEUR

C.-A. LAISANT

Docteur ès Sciences
Ancien Examinateur à l'École Polytechnique

DIRECTEURS-RÉDACTEURS

Ed. MAILLET
Docteur ès Sciences
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées
Examinateur à l'École Polytechnique

A. MALUSKI
Agrégé de Mathématiques
Ancien Élève de l'École Normale supérieure
Proviseur du Lycée de Sceaux

A. BOULANGER
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers
Répétiteur et Examinateur d'admission à l'École Polytechnique

---

Publication honorée d'une souscription du Ministère
de l'Instruction publique

TOME XXVII — 1920

Nos 1 et 2. — JANVIER-FÉVRIER 1920

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

—

1920

Ce Recueil paraît chaque mois

VOIR LES AVIS DIVERS ET LA CORRESPONDANCE à la page 2 de la Couverture

SOMMAIRE DES N°s 1 ET 2.

S'adresser, pour la rédaction, à M. *Ed. Maillet*, Examinateur des élèves à l'École Polytechnique, 11, rue de Fontenay, Bourg-la-Reine, ou à M. *A. Maluski*, Proviseur du Lycée Lakanal, à Sceaux, ou à M. *A. Boulanger*, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, rue Gay-Lussac, 30, Paris; pour les abonnements et les tirages à part, à MM. *Gauthier-Villars et Cie*, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Rédacteur de service : M. A. MALUSKI, Proviseur du lycée Lakanal à Sceaux (Seine).

AVIS DIVERS.

QUESTIONS recemment reçues de MM. *Belga*, Butin, A. Colucci, A. Cunningham, Despujols, Howarth, Imbert, G. Métrod, H. de Montille, Nagel, *Nemo*, J. Pacé, La Rédaction, *Is. Uber*, Vaulot, Villareal, Woodall.

RÉPONSES récemment reçues de MM. L. Aubry, 4303, 4755, 4859, 4967, 4969, 4998; *Belga*, 4907; Bouttard, 4963, 4966; Brocard, 3474, 5000; Colucci, 4958; Despujols, 2371, 4964, 4969, 4972; Goormaghtigh, 2375, 4969, 4973; Hendlé, 2162, 2375, 4976, 4978, 4979; Hudson, 4955; Lecat, 4133, 4975, 4993; Malo, 2600; G. Métrod, 4792, 4963, 4966, 4973; de Montille, 4870, 4911, 4947, 4954, 4973; J. Pacé, 4988; Pekelharing, 4888; Poulet, 4902, 4985; La Rédaction, 4639; H. Sebban, 4973, 4981, 4983, 4990, 5000.

Nous prions nos Correspondants de rappeler leur adresse dans chacun de leurs envois; de *n'écrire que sur le recto de la feuille*. Les formules doivent être écrites et les figures *faites avec le plus grand soin*, de façon qu'elles ne prêtent à aucune ambiguïté pour l'impression, particulièrement en ce qui concerne les indices, les signes, etc. En général, rien de ce qui est à imprimer ne doit être oublié, la ponctuation par exemple. La dactylographie est recommandée. Enfin, nous prions nos correspondants d'une manière tout à fait instante, de s'attacher, dans la mesure du possible, à ne pas omettre, lorsqu'ils citent un périodique, l'année de la publication, renseignement aussi important que celui de sa tomaison.

Gen. Stechert

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS.

QUESTIONS (1).

5001. [O'1] Tous les grands cercles qui passent par un point fixe d'une sphère passent par un autre point fixe. On en conclut, en déformant la sphère, que toutes les géodésiques d'une surface à courbure totale constante positive, qui passent par un point fixe de cette surface, passent par un autre point fixe.

Cette propriété caractérise-t-elle les surfaces à courbure totale constante positive?

La question a-t-elle déjà été étudiée?

R. BRICARD.

(1) Nous croyons devoir signaler à l'attention de nos correspondants les observations publiées en tête du Tome XI (1904) de l'*Intermédiaire* et précisées à la page 146 du Tome XXIII (1916), notamment au sujet des réponses trop longues, ainsi que les observations reproduites périodiquement à la fin de la deuxième ou troisième page de la couverture. L'oubli de certaines d'entre elles (longueur des questions et réponses, figures, écriture des formules, indices, signes, *ponctuation*) peut amener un retard dans la publication et compliquer le travail de l'Imprimerie et de la Rédaction.

Nos lecteurs trouveront, en tête du Tome XI (1904) ou dans l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques* (Paris, Gauthier-Villars), la liste des abréviations conventionnelles employées pour désigner les principaux Recueils cités. LA RÉDACTION.

5002. [**M' 3**] Connaissant quatre normales communes à deux paraboles, déterminer la cinquième.

En particulier, si les deux paraboles ont même foyer, à quelles conditions doit satisfaire le triangle des trois normales communes? L. BICKART.

5003. [**K' 16**] Est-il possible, par des opérations effectuees à la surface d'une sphère (sans utiliser de surface auxiliaire), avec un compas, d'y tracer un grand cercle, et plus généralement d'y marquer deux points dont la distance soit une fonction donnée du rayon de la sphère, par exemple ce rayon lui-même, la longueur de l'arête d'un polyèdre régulier inscrit dans la sphère, etc.?

La construction la plus générale effectuée sur la sphère avec le compas peut se résumer ainsi : on part de n points pris *au hasard* M_1, M_2, ..., M_n. On peut alors construire le point M_{n+1} défini par les conditions

$$M_i M_{n+1} = M_j M_k, \qquad M_{i'} M_{n+1} = M_{j'} M_{k'}$$
$$(i, j, k, i', j', k' \leqq n),$$

puis le point M_{n+2} défini d'une façon analogue, et ainsi de suite. La question est alors la suivante : est-il possible d'obtenir, *par un nombre fini d'opérations*, et quels que soient les points de départ M_1, ... M_n (moyennant toutefois peut-être certaines conditions de réalité), deux points satisfaisants? R. BRICARD.

5004. [**C12b, d**] Dans un article publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (t. **17**, **1917**, p. 161) sous le titre : *Sur la quantité*

$$(DA)(BC) + (DB)(CA) + (DC)(AB)$$

envisagée dans l'espace, et dans une communication verbale récente à la Société mathématique, M. G. Fontené a donné une extension à l'espace d'un théorème de Bellavitis relatif à un quadrangle plan. Tandis que le théorème de Bel-

lavitis a été obtenu par la méthode des équipollences, celui de M. G. Fontené concernant le tétraèdre a reçu une démonstration directe basée sur l'inversion et il s'est montré rebelle à toute démonstration tirée de l'analyse vectorielle usuelle. Il semble qu'inversement le théorème de M. G. Fontené puisse servir de point de départ à un calcul vectoriel nouveau.

Nous signalons la question aux lecteurs de l'*I. M.*, en leur demandant de plus : 1° si quelque tentative d'extension de l'analyse vectorielle n'a pas été faite dans ce sens; 2° si le théorème de Bellavitis appartient en propre à cet auteur, le *Traité de Géométrie* de Rouché et Comberousse l'énonçant sans nom patronymique. La Rédaction.

3005. **[M¹1]** et **[N¹1e]** Je désirerais connaître le lieu ou tout au moins des indications sur le lieu des points de contact des tangentes qu'on peut mener d'un point donné P aux cubiques à point double dont on donne le point double, deux points et trois tangentes. P. Morel.

3006. **[M¹1]** et **[N¹1e]** Lieu du point de contact des tangentes menées d'un point P aux cubiques qui passent par quatre points donnés et touchent quatre droites données.

P. Morel.

3007. **[I18c]** Je retrouve dans mes brochures, sans autre indication, une « Table des nombres rythmiques, compris de 1 jusqu'à 8 589 934 590 par M. Bronislas Zebrowski ».

Ce sont les nombres de la forme

$$2^n(2^x+1)\dots(2^z+1)$$

où les exposants peuvent être nuls.

Je désirerais quelques renseignements sur l'auteur et sur l'utilité de cette Table. A. Gérardin.

5008. [**L^{1}17**] On déduit facilement d'un théorème général sur les $p^{\text{ièmes}}$ centres de courbure des courbes triangulaires symétriques, que nous avons signalé (*C. R.*, 18 novembre 1918), la proposition suivante :

Si trois coniques se touchent en un même point et sont l'une circonscrite, l'autre inscrite, la troisième conjuguée à un même triangle, la tangente commune forme un faisceau harmonique avec les diamètres de ces coniques aboutissant au point de contact.

Pourrait-on en donner une démonstration synthétique assez simple? R. GOORMAGHTIGH (Mons).

5009. [**K^{1}4**] Sait-on construire un triangle connaissant les pieds des trois bissectrices? R. DESPUJOLS.

5010. [**O^{1}1**] Un mobile A décrit une droite (D) avec une vitesse v_1. Quelle devra être la trajectoire (C) d'un autre mobile B de vitesse tangentielle invariable v_2 pour que la tangente en B à la courbe (C) fasse un angle constant avec la droite BA?

Dans le cas particulier où cet angle est nul, la trajectoire de B est la « courbe du chien ». J. PACÉ.

5011. [**H2**] Lorsque l'on connaît une intégrale z de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = ay^3 + by^2 + cy + d,$$

où a, b, c désignent des fonctions de x, on la ramène à la forme

$$\frac{du}{dx} = a_1 u^3 + b_1 u^3 + c_1 u$$

en posant

$$y = z + u.$$

Si maintenant on pose

$$u = vw$$

et qu'on détermine w par la condition

$$\frac{dw}{dx} = c_1 w,$$

on obtient une équation de la forme

$$\frac{dv}{dx} = a_2 v^3 + b_2 v^2.$$

Que peut-on savoir sur l'intégrale générale de cette dernière lorsqu'on en connaît une, ou même deux intégrales particulières. *Satinier.*

3012. [I11] Soient :

U_n le terme général d'une fonction numérique *fondamentale* correspondante;
V_n le terme général d'une fonction numérique *primordiale* correspondante;
W_n le terme général de toute fonction numérique répondant aux mêmes valeurs de p et q (y compris V_n et V^n);

on aura la relation suivante :

$$(1) \quad W_n = U_r W_{n-r+1} - q\, U_{r-1} W_{n-r} = U_{n-r+1} W_2 - q\, U_{n-r} W_{r-1},$$

r étant un nombre entier positif plus petit que n. Est-elle connue?

Cas particuliers :

$$(2) \quad U_n = U_r U_{n-r+1} - q\, U_{r-1} U_{r-1},$$
$$(3) \quad U_{2m+1} = U_{m+1}^2 - q\, U_m^2.$$

Si q est un carré positif ou négatif, U_{2m+1} sera la différence ou la somme de deux carrés

$$(4) \quad W_{2m} = U_m W_{m+1} - q\, U_{m-1} W_n = W_m U_{m+1} - q\, W_{n+1} U_m;$$

d'où

$$(5) \quad W_{m+1} U_m - W_m U_{m+1} = q\,(W_{m-1} U_m - W_m U_{m-1});$$

d'où

$$W_{m+1} U_m - W_m U_{m+1} = W_0 q^{m-1}.$$

Pour les fonctions V_n, on aura

(6) $$2q^m = W_{m+1} U_m - V_m V_{n+1},$$

et des équations (4) et (6) on tirera la relation connue

$$V_{2n} = V_n^2 - 2q^n.$$

Applications trigonométriques (*voir* Lucas, *Théorie des nombres*, p. 319). E. GUÉRIN.

5013. [**B1d**] Quel est, dans la matrice de classe n et d'ordre p, le plus grand vide laissant au moins un élément non nul dans chaque sous-matrice d'ordre π? Nous avons besoin de la solution, surtout pour $\pi = p - 1$.

M. LECAT.

5014. [**B1d**] Déterminer l'expression du nombre des termes (non nuls) du permanent de la matrice de classe 2

$$\left\| f(i_1, i_2) \sum_{\alpha+2}^{\pi+2} (\delta_{i_1+i_2, \alpha} + \delta_{i_1+i_2, p+\alpha}) \right\|_p,$$

ayant le plus grand vide qui laisse différents de zéro tous les mineurs d'ordre supérieur à $p - \pi - 1$. Pour $\pi = 1$, ce nombre est 2 quel que soit p, mais pour $\pi > 1$ il dépend de p.

Généraliser pour une classe n et un genre g quelconques.

M. LECAT.

5015. [**I3**] Trouver l'expression des nombres N qui admettent les résidus cités ci-dessous pour les diviseurs successifs cités :

$$N \equiv 1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ \ldots\ (n-1) \text{ unités},$$
$$\text{mod} \equiv 11,\ 111,\ 1111,\ 11111,\ \ldots\ (n \text{ unités}).$$

Trouver aussi le plus petit nombre N qui admet les résidus ci-dessus pour les modules cités jusqu'au module 1111.

Allan CUNNINGHAM.

5016. [**I19c**] J'ai rencontré certains triangles ayant même distance $OI = d$, distance entière des centres des cercles inscrit et circonscrit.

Exemple :

$$a = 10, \quad b = 10, \quad c = 16, \quad d = 5;$$
$$a = 48, \quad b = 40, \quad c = 40, \quad d = 5;$$

chercher d'autres triangles ayant une même valeur entière pour d.

A. GÉRARDIN.

5017. [**I19c**] Trouver des triangles pour lesquels $R = d^2$.

Exemple :

$$a = 48, \quad b = c = 40, \quad d = 5, \quad R = 25.$$

A. GÉRARDIN.

5018. [**I19c**] Quels sont les triangles pour lesquels on aura $R - 2r = x^2$.

Exemple :

$$a = 480, \quad b = c = 510, \quad R = 25, \quad r = 12, \quad x = 1.$$

J'indiquerai

$$a = 8\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2), \quad b = c = 4\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2), \quad x = \alpha^2 - 3\beta^2.$$

A. GÉRARDIN.

5019. [**I19c**] Je connais des triangles pour lesquels R et r sont simultanément des carrés parfaits. Chercher des formules générales de ce problème. A. GÉRARDIN.

5020. [**J5**] H. Poincaré (*Les mathématiques et la logique. Dernières pensées.* Flammarion, 1913) parle des nombres : Aleph — zéro, Aleph — un (*loc. cit.*, p. 150, 151). Je désirerais la définition de ces nombres Aleph.

A. BOUTIN.

5021. [**U**] A quelle constellation appartient le Keuterlin, minuscule étoile citée dans le dicton arabe : « Tu distingues le Keuterlin et tu ne vois pas la pleine lune ? »

Quelles sont ses coordonnées approximatives?

G. LEMAIRE.

5022. [**X5**] Dans le volume (*A. F. A. S.*, Caen, 1894, p. 272-276) se trouve une communication sur le « Calculateur Henri Genaille ». Je désirerais savoir si cet appareil a été mis dans le commerce, et où je pourrais me le procurer?

Se trouve-t-il au moins dans les collections des Arts et Métiers? (*Cf.* **1568**, **1899**, 171; **1900**, 186.)

A. GÉRARDIN.

5023.]**V9**] M. Norbert-Vuy a fait, dans une séance de l'*A. F. A. S.* (18 août 1880), une communication sur la société « Arti et Amicitiæ ». Je désirerais, si cette société existe encore, avoir quelques renseignements à son sujet.

A. GÉRARDIN.

5024. [**L'7**] Je désire connaître des indications sur le lieu des foyers des coniques qui passent par un point donné, touchent une droite donnée et sont osculatrices à une cissoïde oblique.

P. MOREL.

5025. [**U**] Pourrait-on me dire si l'Académie des Sciences a bien voulu examiner le projet de Calendrier universel que je lui ai adressé le 14 juin 1907? (Projet publié in-extenso dans *Sphinx-Œdipe*, mars 1909.)

La question en vaudrait peut-être la peine, puisque de

nombreux Congrès internationaux (Londres, 1910; Boston, 1912; Pétersbourg et Bruxelles, 1913; Liége et Paris, 1914) ont demandé la réforme du Calendrier grégorien.

G. Lemaire.

5026. [**U**] M. F. Honoré, dans *L'Illustration* du 23 février 1918, déclare que la Ligue pour la réforme du Calendrier (109, quai d'Orsay) a adopté statutairement, à l'exclusion de tout autre, le projet de M. Paul Delaporte.

Pourrait-on me dire où et quand ce projet a été exposé ou publié pour la première fois?

G. Lemaire.

5027. [**I 25**] Quelle est la forme générale des nombres décomposables de deux façons différentes en une somme de deux carrés?

J. Pacé.

2412. [**R 1 f**α] (**1902**, 227) J'ai toujours vu la théorie des engrenages différentiels exposée d'après la considération des mouvements relatifs. Où pourrais-je trouver une théorie synthétique directe de ces sortes d'engrenages?

Paulmier.

2423. [**O**] (**1902**, 229) Dans l'équation polaire d'une surface

$$\sigma(\rho, \theta, \psi) = 0$$

[ou dans les équations d'une courbe $\sigma(\rho, \theta, \psi) = 0$, $f(\rho, \theta, \psi) = 0$], on permute ρ, θ, ψ de toutes les manières possibles. Existe-t-il des relations entre les différentes surfaces (ou courbes) qui en dérivent?

N.-J. Hatzidakis (Athènes).

2425. [Σ] (**1902**, 230) 1° Toute puissance huitième $n^8 > 1$ est la somme d'un cube, de deux hexagones et de deux triangulaires de rang pair, $\neq 0$.

2° Toute puissance huitième impaire $(2n+1)^8 > 1$ est la somme de quatre triangles et de quatre carrés, $\neq 0$.

3° Toute puissance neuvième $n^9 > 1$ est la somme de deux cubes et de deux pentagones, $\neq 0$.

4° Toute puissance dixième $n^{10} > 1$ est la somme de deux carrés et de deux triangulaires de rang pair, $\neq 0$.

5° Toute puissance dixième $n^{10} > 1$ est la somme de deux cubes, de deux carrés et de deux hexagones, $\neq 0$.

6° Toute puissance dixième $n^{10} > 1$ est la somme de deux cubes, de deux carrés et de deux triangulaires, $\neq 0$.

7° Toute puissance dixième $n^{10} > 1$ est la somme de deux triangles, de deux carrés et de deux puissances cinquièmes, $\neq 0$.

8° Toute puissance dixième $n^{10} > 1$ est la somme de deux cubes, de deux triangles et de deux pentagones, $\neq 0$.

9° Toute puissance dixième $n^{10} > 1$ est la somme d'une puissance sixième, d'une puissance cinquième, d'un bicarré, d'un cube et de deux triangulaires, $\neq 0$.

10° Toute puissance seizième $n^{16} > 1$ est la somme de trois triangles et de trois carrés, $\neq 0$.

11° Toute puissance dix-huitième $n^{18} > 1$ est la somme de deux cubes, de deux triangles et d'un pentagone, $\neq 0$.

12° Toute puissance vingt-deuxième $n^{22} > 1$ est la somme d'un cube, de deux triangles, de deux carrés et d'un pentagone, $\neq 0$.

13° Toute puissance vingt-deuxième $n^{22} > 1$ est la somme de trois cubes, de deux carrés et d'un pentagone, $\neq 0$.

14° Toute puissance vingt-sixième $n^{26} > 1$ est la somme de deux triangles de rang pair, de deux carrés et de deux hexagones, $\neq 0$.

G. de Rocquigny.

2431. [**J 4 a**] (**1902**, 258) Où est-il établi pour la première fois que le groupe alterné de degré n est simple quand $n \neq 4$? (*Comp.* Burkhardt, *Encyclop. der Math. Wiss.*, Vol. I, p. 219.)

A. Miller (Stanford University, Californie).

RÉPONSES.

4886 (**1919**, 3) (R. Goormaghtigh). — *Arithmotriangles.* — Il faut d'abord noter que, si cette distance OI $= d$ est un nombre rationnel, on obtiendra en général des entiers en multipliant les éléments initiaux par le dénominateur de d.

On verra facilement que le problème se ramène à trouver des valeurs générales de a, b, c telles que

$$(1) \qquad d^2 = R^2 - 2Rr = \frac{abc\,p(abc\,p - 8S^2)}{[4pS]^2}$$

ou encore

$$d^2 = \frac{abc}{16S^2}[abc - 8(p-a)(p-b)(p-c)].$$

On pourra obtenir des solutions même avec S, R ou r irrationnels, mais souvent la condition d entier conduit à des triangles généraux ayant beaucoup d'éléments en nombres entiers.

Premier problème. — Supposons un triangle ABC, ses trois côtés a, b, c; si $A = 60°$, nous aurons la condition

$$(2) \qquad a^2 = b^2 - bc + c^2,$$

dont on connaît la solution générale en nombres primitifs

$$(3) \qquad a = \beta^2 - \alpha\beta + \alpha^2, \qquad b = \beta^2 - \alpha^2, \qquad c = \beta^2 - 2\alpha\beta$$

[*cf.* mon article *Soc. Philom.*, 1911 (*Sur quelques équations indéterminées*)].

Calculons

$$p = \frac{3\beta(\beta-\alpha)}{2}, \qquad p - a = \frac{(\beta+\alpha)(\beta-2\alpha)}{2},$$

$$p - b = \frac{(\beta-\alpha)(\beta-2\alpha)}{2}, \qquad p - c = \frac{\beta(\alpha+\beta)}{2},$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}[\beta(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)(\beta-2\alpha)],$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\beta^2 - \alpha\beta + \alpha^2}{\sqrt{3}}, \qquad 2r = \frac{2S}{p} = \frac{(\beta+\alpha)(\beta-2\alpha)}{\sqrt{3}},$$

$$d^2 = R^2 - 2Rr = \alpha^2(\beta^2 - \alpha\beta + \alpha^2).$$

On voit donc qu'il faut maintenant résoudre

$$(4)\qquad \beta^2 - \alpha\beta + \alpha^2 = z^2,$$

en réitérant le procédé, ce qui donne

$$(5)\qquad \beta = x^2 - y^2, \qquad \alpha = 2xy - y^2, \qquad z = x^2 - xy + y^2;$$

en posant

$$x = 2\mathrm{P}, \qquad y = \mathrm{P} + \mathrm{Q},$$

on retrouve la solution générale de M. Goormaghtigh (**1919**, 3). Ce processus fait penser aux analogies rencontrées dans mes *Etudes sur les distances en nombres entiers de trois points et de leur centre isogone à* 120° (*N. A.*, 1916, p. 62-74) et problèmes analogues (*cf.* aussi *N. A.*, février 1918, l'article de M. Turrière). Il faut donc aussi étudier attentivement le cas de $A = 120°$, ce que je ne puis faire ici ; on est amené à la condition

$$(6)\qquad 3.d^2 = (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)(4\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2),$$

qui semble impossible en nombres rationnels.

Deuxième problème. — Les cas de $A = 30°$ ou $45°$ ne donnent rien. Pour $A = 90°$, on est amené à chercher des solutions de

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 - 4\alpha\beta + 5\beta^2) = \square,$$

qui redonne, sous une autre forme, les nombres de Sophie Germain

$$X^4 + 4Y^4.$$

Troisième problème. — Cas du *triangle isoscèle*. Supposons

$$a = 2x, \qquad b = c = x + y;$$

j'en tire

$$(7)\quad \begin{cases} p = 2x + y, \quad p - a = y, \quad p - b = p - c = x, \\ \mathrm{S}^2 = x^2[y(2x + y)], \\ \mathrm{R} = \dfrac{(x+y)^2}{2\sqrt{y(2x+y)}}, \quad r = \dfrac{xy}{\sqrt{y(2x+y)}}, \quad 4d^2 = \dfrac{(x^2 - y^2)^2}{[y(2x+y)]}. \end{cases}$$

Il faut donc que $y(2x + y) = \theta^2$, mais alors de nombreux éléments deviendront aussi entiers ; on doit alors avoir

$$(8)\qquad (y + x^2) = \theta^2 + x^2,$$

dont nous connaissons la solution générale en nombres positifs ; la

deuxième combinaison, qui permute θ et x, donne les mêmes valeurs finales; on aura donc

$$(9)\qquad x = \alpha^2 - \beta^2, \qquad \theta = 2\alpha\beta, \qquad y = 2\beta^2,$$

avec, pour d, un dénominateur égal à $4\alpha\beta$. Nous aurons donc au moins les *douze* éléments entiers suivants :

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} a = 8\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2), \qquad b = c = 4\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2), \qquad p = 8\alpha^3\beta, \\ p - a = 8\alpha\beta^3, \qquad p - b = p - c = 4\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2), \\ S = 32\alpha^3\beta^3(\alpha^2-\beta^2), \qquad R = (\alpha^2+\beta^2)^2 = \square, \qquad r = 4\beta^2(\alpha^2-\beta^2), \\ h_a = \theta = 8\alpha^2\beta^2, \qquad d = (\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-3\beta^2). \end{array}\right.$$

Exemples. — Pour $\alpha^2 - 3\beta^2 = 1$, on aura

$$R = \square = d^2 = 6\beta^2 + 1.$$

Pour $\alpha = 5$, $\beta = 3$,

$$a = 480, \qquad b = c = 510, \qquad p = 750, \qquad p - a = 270,$$
$$p - b = p - c = 240, \qquad h_a = 450,$$
$$s = 108000, \qquad R = 17^2 = d^2, \qquad r = 12^2, \qquad d = 17, \qquad d^2 - 2r^2 = +1.$$

Pour $\alpha = 5$, $\beta = 4$,

$$a = 1440, \qquad b = c = 3280, \qquad \ldots, \qquad d = 943.$$

Pour $\alpha = 2$, $\beta = 1$,

$$a = 48, \qquad b = c = 40, \qquad \ldots, \qquad R = 25 = d^2, \qquad d = 5.$$

Note. — Dans le triangle 10, 10, 16, on a aussi $d = 5$.

Voici une autre méthode pour trouver les triangles isoscèles répondant à la question. Soit un triangle quelconque a, b, c; on aura évidemment

$$(11)\quad d^2 = R^2 - 2Rr = \left(\frac{abc}{4S}\right)^2 - \left(\frac{abc}{4S}\right)\left(\frac{2S}{p}\right) = \frac{a^2b^2c^2}{16S^2} - \frac{abc}{a+b+c};$$

on connaît les valeurs de p, $p - a$, $p - b$, $p - c$, et l'on sait que

$$(12)\quad 16S^2 = (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c),$$

d'où, en posant $c = b$,

$$d^2 = \frac{[b(b-a)]^2}{4b^2 - a^2}.$$

Il faut donc avoir $(2b)^2 - a^2 = u^2$, puis multiplier par u les éléments

initiaux du triangle. Deux cas se présentent : d'abord

$$2b = p^2 + q^2, \qquad a = p^2 - q^2, \qquad d = \frac{b(b-a)}{2pq};$$

d'où

$$a = 8pq(p^2 - q^2), \qquad b = c = 4pq(p^2 + q^2);$$

ce sont les formules (10) ; ensuite

$$2b = p^2 + q^2, \qquad a = 2pq;$$

d'où

$$a = 8pq(p^2 - q^2), \qquad b = c = 2(p^4 - q^4),$$
$$d = (p^2 + q^2)(p^2 - 4pq + q^2);$$

mais il faut remarquer qu'en posant $p = \alpha + \beta$, $q = \alpha - \beta$, on retrouve encore les formules (10) qui doivent ainsi donner toutes les solutions pour les triangles isoscèles; les côtés a, $b = c$ sont toujours pairs.

Quatrième problème. — Cas d'un *triangle quelconque.* On peut supposer

$$b = 2x, \qquad a = y - z, \qquad c = y + z;$$

on retrouve comme cas particulier le triangle où $A = 60°$. J'ai posé

$$s^2 = (y^2 - x^2)(x^2 - z^2), \qquad \text{puis} \qquad y = (x^2 - z^2)\theta \pm z;$$

avec le signe négatif, on aura

$$(x^2 - z^2)\theta^2 - 2\theta z - 1 = [(x - z)\theta - 1][(x + z)\theta + 1] = U^2 = \omega V^2$$

et

$$V = (x - z)\theta - 1,$$

car U peut être irrationnel; enfin

$$r.\sqrt{\omega} = x + z, \qquad R.2V\sqrt{\omega} = \theta x(y - z),$$

(13) $$4U^2.d^2 = \theta x(y - z)[\theta x(y - z) - 4V(x + z)].$$

Exemple :

$$\omega = 3, \quad V = 4, \quad x = 8, \quad z = 3, \quad y = 52, \quad \theta = 1,$$
$$r = \frac{11}{\sqrt{3}}, \qquad R = \frac{49}{\sqrt{3}}, \qquad d = 21.$$

C'est aussi l'exemple de M. Goormaghtigh (**1919**, **3**).

Supposons encore

$$a = 2n - 2x, \qquad b = 2n, \qquad c = 2n + 2y;$$

j'arrive à la condition

$$(14) \quad d^2 = \frac{4n(n-x)(n+y)[n(x^2+xy+y^2)+(y-x)(y+x)^2]}{(3n+y-x)(n+y+x)(n+y-x)(n-y-x)}.$$

En écrivant $y = x$, on est conduit à

$$(n^2 - x^2)(n^2 - 4x^2) = w^2.$$

Or l'équation double

$$n^2 - x^2 = \pm f^2, \qquad n^2 - 4x^2 = \pm g^2$$

est impossible (cf. *Mathew Collins*, n° 33, p. 32). *Donc d ne peut être rationnel pour un triangle ayant ses côtés a, b, c en progression arithmétique.*

En posant $-y = x$, on retombe sur un triangle isoscèle.

On peut encore, dans (1), faire

$$(15) \quad a = s^2 + t^2, \qquad b = r^2 + t^2, \qquad c = r^2 + s^2, \qquad p = r^2 + s^2 + t^2 = \lambda u^2,$$

et se donner s et t; on en tire facilement, dans certains cas, des formules générales. En supposant ici $s^2 + t^2 = 2r^2$, j'arrive à une équation

$$\alpha^8 + 14\alpha^4\beta^4 + \beta^8 = \square$$

impossible pour $\alpha \neq \beta$, d'après Euler. Pour $s^2 + t^2 = \lambda r^2$, on est conduit à des triangles isoscèles.

On pourra étudier aussi facilement le cas de

$$(16) \qquad a = x + y, \qquad b = x + z, \qquad c = y + z,$$

ou bien encore partir d'un triangle

$$(17) \qquad a, \quad b, \quad x,$$

où l'on se donnerait a et b. Ici, comme dans beaucoup d'autres problèmes, la plus grande difficulté est le choix des inconnues initiales.

Il y aurait lieu de consulter aussi l'article de E.-N. Barisien (*A.F.A.S.*, 1914, p. 48-57) : « Triangles dont les côtés et les hauteurs sont des nombres entiers ainsi que 18 autres éléments. » L'auteur n'a pas parlé de d, mais il est facile d'ajouter la forme générale de ce 25e élément entier du triangle.

Je tire en effet de ses formules (3) et (4), en posant $\alpha = 2\beta$,

(18) $$d^2 = \beta^2(\lambda^2+1)^2(\mu^2+1)^2[(\lambda\mu - 2\lambda - 2\mu + 1)^2 + (\lambda - \mu)^2].$$

Il vaudrait mieux garder quatre indéterminées initiales m, n, f, g. On annulera successivement les deux racines des carrés entre crochets dans (18); mais, tandis que $\lambda = \mu$ donne le triangle isoscèle, la deuxième conduit à

(19) $$4f^4 + 8f^3s + 16f^2s^2 + 12fs^3 + 5s^4 = (2f^2 + 2fs + 3s^2)^2 - (2s^2)^2 = X^2,$$

qui ne semble pas acceptable. A. Gérardin.

4905 (**1919**, 35) (A. Colucci). — *Équation de Fermat* (**1919**, 125). — Il n'existe vraisemblablement pas de loi de récurrence générale des nombres D rangés dans l'ordre de grandeur, mais il semble qu'on pourrait répartir ces nombres en catégories pour lesquelles de telles lois existeraient et, par suite, trouver des expressions générales pour chaque catégorie considérée.

Si la période des quotients incomplets du développement de $\sqrt{D}$ en fraction continue a un nombre impair de termes, on considérera séparément les périodes de 1, 3, 5, ..., $2m+1$ termes.

On trouve ainsi que les nombres D dont la période a un terme répondent à la formule

$$D_n = n^2 + 1 \qquad \text{et l'on a} \qquad D_n - D_{n-1} = 2n - 1;$$

la période a pour terme $2n$ et elle est précédée du quotient incomplet n.

Les nombres dont la racine carrée se développe en fraction continue périodique à période de trois termes répondent de même à la formule générale

$$[(4a^2+1)b + a]^2 + 4ab + 1,$$

où a et b sont des entiers quelconques, positifs, non nuls. La période a pour termes $2a$, $2a$, $(4a^2+1)2b + 2a$; elle est précédée du terme $(4a^2+1)b + a$. Les valeurs de D peuvent donc dans ce cas se ranger dans un tableau à double entrée et il est aisé de trouver des formules de récurrence liant les termes d'une même ligne ou d'une même colonne.

D'une façon générale, le développement en fraction continue de $\sqrt{D}$, lorsque la période des quotients incomplets a $2m+1$ termes, se compose d'abord de l'entier n, valeur de $\sqrt{D}$ à une unité près par

défaut, puis de la période $a, b, c, \ldots, l, l, \ldots, c, b, a, 2n$, qui comprend une partie symétrique de $2m$ termes et le terme $2n$.

Dans l'expression générale de ces nombres entreront donc $m+1$ paramètres plus ou moins arbitraires et, m d'entre eux étant fixés, les nombres D correspondants répondront à une loi de récurrence à coefficients constants.

On trouve ainsi, pour $m = 2$, les expressions

$$D = 4k^2 + 4k + 5, \qquad 25k^2 + 36k + 13, \qquad 169k^2 + 140k + 29,$$
$$625k^2 + 250k + 50, \qquad \ldots.$$

Sans doute une étude systématique de la question permettrait de dégager des expressions générales de D pour m quelconque, ainsi que les conditions qui doivent relier les paramètres choisis. On démontre d'ailleurs facilement que, dans tous les cas, D doit être la somme de deux carrés. P. Poulet.

4912 (**1919**, 37) (H. Sebban). — *Puissances des coefficients du binome* (**1919**, 128). — Comme suite à ma réponse **1919**, 128, je dois dire, de façon plus précise, que la somme ΣC des coefficients du binome ou de leurs puissances, ΣC^m, a été visée ici même et dans d'autres journaux mathématiques.

L'étude systématique du sujet paraît avoir été présentée par le major P.-A. Mac-Mahon. Je n'en puis rapporter que les titres :

Sur une classe de fonctions génératrices de la théorie des nombres (*Phil. Transac., R. S., London*, t. 185, 1894, p. 111-160).

Sur les sommes des puissances semblables des coefficients binomiaux (*Quart. J. of pure and appl. Math.*, t. 33, 1902, p. 274-288).

Je rappellerai maintenant quelques références bibliographiques.

ΣC. — Problème étudié, mais incomplètement résolu. Voir *I. M.*, rép. **4867**, **1919**, 31 (Poisson; E. Collignon; H. Delannoy).

ΣC alternée. — *I. M.*, rép. **4867**. **1919**, 31 (E. Catalan; A. Genocchi).

ΣC pris de trois en trois. — Voir *N. A.*, 1860, p. 32-33 (H. Garcet); *N. A.*, 1861, p. 260-263 (E. Catalan, avec mention de M. Haton de la Goupillière); *N. A.*, 1861, p. 373-375 (Dellac).

ΣC pris de quatre en quatre. — Voir *N. A.*, 1861. p. 8-9 (F.-A. Beynac); *N. A.*, 1861, p. 147-138 (E. Catalan, sous un pseudonyme).

C'est, au surplus, l'objet de la question 3533 (**1909**, 145) résolue **1909**, 286; **1913**, 226.

ΣC^2. — Voir *N. A.*, quest. 389 (d'après Lagrange); *N. A.*, 1871, p. 223 (D. André); et pour diverses relations *N. A.*, 1893, quest. 1655 et 1656 (Szily) résolues 1916, 39.

ΣC^3. — Problème difficile, proposé ici, **1894**, 17, quest. **42** (Laisant), et **1894**, 46, quest. 169 et 170 (J. Franel).

Une réponse (J. Franel) a été donnée **1894**, 45, à la question **42**, mais les formules des questions 169 et 170, non encore démontrées ici, montrent la difficulté de la recherche d'une formule ΣC^3.

ΣC^3 alternée. — Question 1866 (G. Vacca), **1900**, 164, d'après une formule de Dixon (*Mess. of Math.*, t. **20**, 1890, 79).

Aucune réponse n'a encore paru ici.

Note. — La somme des nombres combinatoires ne doit pas être confondue avec celle des coefficients du binome $(1+x)^n$, qui s'obtient immédiatement; car elle répond à $x = 1$, ce qui donne 2^n.

H. Brocard.

4919 (**1919**, 65) (H. Brocard). — *Division itérée.* — Après d'actives recherches, M. A. Gérardin a été amené à rectifier divers passages de l'énoncé.

Au n° 3, l'induction proposée ne paraît pas justifiée, et la division itérée ne franchit pas le reste U_3 et devient alors périodique.

Les exemples communiqués pour le cas de $U_{n+2} = U_n$ avec $n > 2$ ont été reconnus erronés, ce qui explique le doute exprimé, p. 66, relativement à la rencontre fortuite de polynomes D et δ qui avaient donné à croire à la possibilité d'aller au delà de U_3.

M. Gérardin a confirmé ses conclusions sur des polynomes D et δ à coefficients et à exposants littéraux, ce que je n'avais pas essayé.

Si donc il n'existe pas de polynomes U_4 et suivants, ce qui exigerait encore une vérification ou une preuve directe, la division itérée serait, en résumé, une opération périodique reproduisant, soit D, soit U_1 et U_2.

J'ignore si ces propriétés ont été rencontrées ou signalées. Plusieurs correspondants m'ont déclaré les croire nouvelles.

Il resterait cependant à indiquer des règles de formation de polynomes D et δ donnant $U_2 = D$ ou $U_3 = U_1$.

Parmi les exemples improvisés, on en rencontre, en moyenne, deux fois plus terminés à $U_3 = U_1$ que de ceux arrêtés à $U_2 = D$; mais l'étude est encore à poursuivre.

H. Brocard.

4927 (**1919**, 69) (A. Gérardin). — *Course magique du cavalier.* — La solution effectivement obtenue par A. Rilly se trouve indiquée page 54 de sa brochure autographiée, intitulée : *Étude sur la symétrie latérale*, etc. Troyes, 1906.

L'auteur signale un second magique et deux autres carrés magiques par le numérotage inverse de chacun des deux premiers.

En lui accusant réception de cette polygraphie, le général Parmentier termine par l'observation suivante : « Il est curieux que, dans ce grand nombre de dessins, il y en ait un seul qui soit parfait. A quelle particularité le doit-il? Il n'existe, jusqu'à présent, aucun carré magique parfait en une chaîne, et l'on était porté à croire qu'il n'en devait pas exister. Après votre découverte, ma quasi-certitude retombe dans le doute. »

Voici donc, ajoute Rilly, un second point obscur qui se signale à l'attention des mathématiciens ou des chercheurs.

H. Brocard.

M. Colucci a envoyé une réponse donnant un parcours semi-magique sur l'échiquier de 64 cases. Ceci serait une réponse à **4894** (**1919**, 5, 93 et 155). Pour le présent problème, la solution de Rilly donne en plus la constante 260 dans les diagonales.

M. Colucci cite, parmi les auteurs ayant étudié le sujet : Euler, Vandermonde, T. Ciccolini (1836), Roget (1840), Jænisch, C. Wenzelides, etc., et recommande la lecture du *Traité des applications de l'Analyse mathématique au jeu des Échecs* (Jænisch, Saint-Pétersbourg, 1862).

A. Gérardin.

4933 (**1919**, 72) (H. Koechlin). — *Triangles semblables* (**1919**, 158). — Cette intéressante proposition, que je crois nouvelle, peut être énoncée ainsi :

Étant donnés, dans un même plan, deux triangles quelconques ABC, $A_1B_1C_1$ *et un point quelconque* M, *on construit les triangles* $A_1B_1C_2$, $B_1C_1A_2$, $C_1A_1B_2$ *directement semblables aux triangles* BAM, CBM, ACM. *Démontrer que les triangles* $A_2B_2C_2$, ABC *sont directement semblables.*

Pour établir ce théorème par la méthode des équipollences, représentons, en grandeur et en direction, par $a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ les côtés BC, CA, AB, B_1C_1, ..., des triangles ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, et par α, β, γ les droites AM, BM, CM. Les triangles $A_1B_1C_2$ et BAM, $C_1A_1B_2$ et ACM étant directement semblables, on a les équipollences

$$A_1C_2 : A_1B_1 = BM : BA, \qquad A_1B_2 : A_1C_1 = CM : CA;$$

d'où

$$A_1C_2 = -\frac{c_1\beta}{c}, \qquad A_1B_2 = -\frac{b_1\gamma}{b}.$$

Portons ces valeurs de A_1C_2 et A_1B_2 dans l'équipollence

$$A_1B_2 + B_2C_2 + C_2A_1 = 0,$$

nous aurons

(1) $$a_2 = \frac{b_1\gamma}{b} - \frac{c_1\beta}{c} = \frac{c\,b_1\gamma - bc_1\beta}{bc}.$$

Or

$$b + \alpha - \gamma = 0, \qquad c + \beta - \alpha = 0, \qquad a_1 + b_1 + c_1 = 0;$$

au moyen de ces relations, on trouve successivement

$$a_2 = \frac{(\alpha-\beta)b_1\gamma - (\gamma-\alpha)c_1\beta}{bc} = \frac{-(b_1+c_1)\beta\gamma + b_1\gamma\alpha + c_1\alpha\beta}{bc},$$

$$\frac{a_2}{a} = \frac{a_1\beta\gamma + b_1\gamma\alpha + c_1\alpha\beta}{abc}.$$

On en conclut immédiatement

$$a_2 : a = b_2 : b = c_2 : c,$$

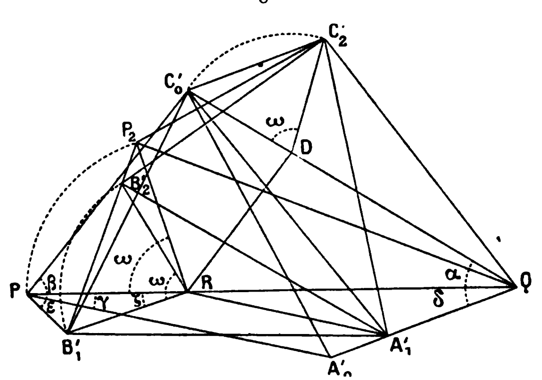
ce qui démontre le théorème.

Étant donnés le quadrangle ABCM et le triangle $A_2B_2C_2$, comment trouver le triangle $A_1B_1C_1$? Pour la solution de ce problème, voir l'*Annuaire de l'Association française pour l'avancement des Sciences : Congrès de Besançon*, 1893, p. 42.

J. Neuberg (Liége).

Suite de la réponse de M. Poulet (**1919**, 160). — 3° Faisons tourner le point P d'un angle ω jusqu'à la position P_2; le point B'_1

Fig. 2.



tourne d'un angle égal et vient en B'_2. Construisons sur QP_2 le triangle $QP_2C'_2$ semblable à QPC'_0. Il suffit évidemment pour

cela de mener RD parallèle à PC'_0 jusqu'à sa rencontre avec QC'_0 et de faire tourner C'_0 autour de D de l'angle ω.

Cela étant, les triangles $A'_1B'_1B'_2$ et $A'_0C'_0C'_2$ sont semblables; en effet,

$$\widehat{A'_1B'_1B'_2} = \frac{\pi-\omega}{2} + A'_1B'_1R = \frac{\pi-\omega}{2} + B - \widehat{C'_0B'_1R} = \frac{\pi-\omega}{2}$$

$$+ B - \widehat{PB'_1R} + \widehat{PB'_1C'_0} = \frac{\pi-\omega}{2} + B - (\pi - \varepsilon - \zeta)$$

$$+ \widehat{PB'_1C'_0} = \frac{\pi-\omega}{2} + \alpha - \delta + \widehat{PB'_1C'_0} = \widehat{C'_2C'_0D} - \widehat{C'_0QA'_1}$$

$$+ \widehat{A'_0A'_1C'_0} = \widehat{C'_2C'_0D} + \widehat{A'_1C'_0Q} = \widehat{A'_1C'_0C'_2}.$$

D'autre part,

$$\frac{B'_1B'_2}{C'_0C'_2} = \frac{B'_1R}{C'_0D}.$$

et

$$\frac{B'_1R}{PR} = \frac{AM}{AC}, \qquad \frac{C'_0D}{PR} = \frac{C'_0Q}{PQ} = \frac{AM}{AB};$$

donc

$$\frac{B'_1B'_2}{C'_0C'_2} = \frac{AB}{AC} = \frac{B'_1B'_1}{A'_1C'_0}.$$

La similitude des triangles $A'_1B'_1B'_2$ et $A'_0C'_0C'_2$ entraîne celle des triangles $A'_1B'_2C'_2$ et $A'_1B'_1C'_0$ qui sont donc tous deux semblables à ABC.

La proposition est donc démontrée pour un triangle quelconque PQR. P. Poulet.

4938 (**1919**, 74) (*Lacet*). — *Le théorème de J. Hadamard sur les déterminants.* — La question est traitée dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques,* au tome 1, volume 1, article 2, n° 31, auquel nous renvoyons le lecteur. Mais comme cet article (rédigé par H. Vogt, d'après l'édition allemande de E. Netto) date de 1904, il doit être complété.

J. Hadamard (*l. c.*) montre comment on peut rattacher les déterminants maximés à ceux de J.-J. Sylvester et il donne un procédé plus général pour en former. Le théorème de Hadamard, énoncé d'une manière générale, est le suivant : le module d'un déterminant $D = |a_{ik}|$, de degré n, à éléments complexes, est toujours inférieur ou égal à la racine carrée du produit des sommes des carrés des

modules des lignes ou des colonnes, ce qu'on peut écrire

$$D\bar{D} \leqq \prod_{1}^{n} i \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\bar{a}_{ik} \right),$$

$\bar{D}$ désignant le déterminant des éléments $\bar{a}_{ik}$ conjugués de a_{ik}. Si les a_{ik} sont réels, D exprime le volume du parallélépipède à n dimensions et le théorème signifie que, parmi les parallélépipèdes dont les arêtes ont des longueurs données, c'est le parallélépipède rectangle qui a le volume le plus grand. Hadamard emploie le procédé de démonstration qui consiste à passer de n à $n+1$, et sa méthode est purement arithmétique. Angela Maria Molinari (*Atti Acc. Lincei Rendic.*, 5[e] série, t. 22, II, 1913, p. 11), se plaçant à un autre point de vue, donne une interprétation géométrique particulière.

Le théorème de Hadamard a acquis en 1903 une importance considérable, par le fait qu'il a été indispensable à J. Fredholm pour établir la convergence des séries résolvant les équations intégrales. Depuis cette date on a donné un grand nombre de démonstrations.

Celle de W. Wirtinger (*Bull. Sc. M.*, 2[e] série, t. 31, I, 1907, p. 175-179; *Monatsh. M. P.*, t. 18, 1907, p. 158-160) a l'inconvénient de s'appuyer sur l'analyse infinitésimale, mais elle est plus courte et conduit immédiatement à une extension au cas des matrices. Le théorème exprime alors que le volume du parallélépipède formé avec n vecteurs donnés dans un espace à m dimensions, m, dépassant n, est maximé quand ces vecteurs deviennent perpendiculaires les uns aux autres.

I. Schur (*M. Ann.*, t. 66, 1908, p. 496) établit le théorème incidemment, dans une étude sur les substitutions linéaires. E. Fischer (*Archiv. M. P.*, 3[e] série, t. 13, 1908, p. 32-40) donne également une démonstration indirecte; il s'appuie sur la forme hermitienne; il généralise.

R.-S. Sharpe (*Bull. Am. M. Soc.*, t. 14, 1908, p. 121-123); T. Muir (*T. R. Soc, South Africa*, t. 1, 1910, p. 323-334, ms 1918); L. Tonelli (*Giorn. mat.*, 2[e] série, t. 16, 1909, p. 212-218) et T. Hayashi (*id.*, 3[e] série, t. 1, 1910, p. 253-258) suivent chacun une méthode directe mais laborieuse. Le dernier ne considère que le cas d'éléments réels.

L. Amoroso (*Giorn. mat.*, 3[e] série, t. 1, 1910, p. 305-315) obtient le théorème comme cas particulier de recherches sur le maximé de déterminants dont les éléments sont certaines intégrales.

T. Boggio (*Bull. Sc. M.*, 2e série, t. 35, I, 1911, p. 113-116) et O. Szász (*M. és T. Lapok*, t. 19, 1910, p. 221-227) donnent à peu près simultanément des démonstrations directes très courtes, peu différentes, et s'appliquant toutes deux aux matrices. Le déterminant est transformé en un autre dont les lignes vérifient la condition d'orthogonalité; de cette manière le carré du module du nouveau déterminant se calcule aisément.

A Kneser (*Die Integralgleichungen*, Brunswig, 1911, p. 227-231) s'occupe aussi de la question.

M. Cipolla (*Giorn. mat.*, 3e série, t. 2, 1912, p. 355-359) s'appuie sur le développement du déterminant par rapport aux éléments de deux files qui se croisent et sur le produit de deux matrices. Cette méthode directe est la plus simple avec celles de W. Blaschke (*Archiv. M. P.*, 3e série, t. 20, 1912-1913, p. 277-279), T. Kubota (*Tôhoku Math. J.*, t. 2, 1912-1913, p. 37) et A.-C. Dixon (*Proc. Cambr. phil. S.*, t. 17, 1913, p. 242).

O. Toeplitz (*N. G. Gött.*, *M. P.*, 1913, p. 432) reprend la propriété, à propos des séries de Dirichlet.

Voir aussi T. Kojima (*Tôhoku Math. J.*, t. 5, 1914, p. 54-60) et pour une généralisation, O. Szàsz (*Monatsh. M. P.*, t. 28, 1917, p. 253-257).

G. Sannia (*Atti Act. Sc. Torino*, t. 41, 1910-1911, p. 39-49, particulièrement p. 47) étend le théorème de Sylvester et Hadamard aux déterminants.

En se basant sur la décomposition d'un déterminant de classe supérieure en une somme arithmétique ou en une somme algébrique de déterminants ordinaires, on peut, avec Hattaway (non publié), E.-W. David (*Johns Hopkins Univ. Circular*, t. 2, 1882, p. 22; réimpr. *B. Am. M. Soc.*, 2e série, t. 14, 1907-1908, p. 17; *cf.* M. Lecat, *Abrégé de la théorie des déterminants*, Gand, 1911, p. 31), ramener la recherche du maximé des déterminants à n dimensions, à éléments réels et compris entre $-a$ et $+a$, à celle qui a lieu pour $n = 2$.

Nous nous proposons de publier une étude du cas, tout à fait général, du maximé des péné-déterminants à éléments complexes, en appliquant, à l'aide des formules de décomposition de Rice (*Am. J. math.*, t. 40, 1918, p. 247), les résultats principaux acquis dans les travaux cités plus haut. M. Lecat (Bruxelles).

Réponse analogue de M. H. Brocard,

Nous renvoyons à Sylvester (*Philos. Magaz.*, t. 34, 1867, p. 461);

Hadamard (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1893, p. 240); E. Pascal (*I determinanti*, Milano, 1897, p. 234).

A. Colucci (Caserte).

4939 (**1919**, 74) (Despujols). — *Sur $x^m - y^m = kz^n$ en entiers.* — *a.* L'égalité

$$x^3 - y^3 = a(a+1)z^3$$

est possible pour

$$x = a^3 + 6a^2 + 3a - 1,$$
$$y = a^3 - 3a^2 - 6a - 1,$$
$$z = 3(a^2 - a + 1),$$

qui est une application des formules d'Ed. Lucas.

Pour a égal à 25 ou 28 par exemple, K sera le produit de trois entiers consécutifs.

b. L'égalité

$$x^4 - y^4 = (a-1)a(a+1)z^4$$

est possible pour

$$x = a^2 + 2a - 1,$$
$$y = a^2 - 2a - 1,$$
$$z = 4(a^2 + 1)$$

(*cf.* **4897**, **1919**, 94, réponses A. Gérardin et L. Aubry).

Pour a égal à 14, 18, 254 ou 258 par exemple, K sera le produit de quatre entiers consécutifs.

A. Gérardin.

4948 (**1919**, 99) (H. Brocard). — *Sur la perspective aérienne.* — La perspective aérienne a été, de très longue date, l'objet d'enseignement dans les Écoles des Beaux-Arts.

Cf. par exemple J.-J. Pillet, *Traité de perspective linéaire*, in-4°, Paris, 1901, p. 243 et suiv. (chapitres relatifs à la perspective aérienne et à la perspective physiologique).

Voir aussi le Chapitre II des *Principes scientifiques des Beaux-Arts*, de E. Brüchke (suivis de l'*Optique et la Peinture*, de H. Helmholtz) (Bibliothèque scientifique internationale. Paris, Germer-Baillère, 1878).

Comme ouvrages anciens, sans remonter à Léonard de Vinci, on peut citer :

F.-E.-V. de Clinchamp, *Éléments de Perspective linéaire et aérienne*, in-8°. Paris, 1820.

P. LAURENT, *Théorie de la Peinture. Perspective linéaire et aérienne*, 2^e^ édition; in-8°. Paris, 1840.

Dans son *Traité de Perspective pittoresque* qui vient de paraître (H. Laurens, éditeur, 1919), M. H. Choquet, professeur à l'Université de Gand, remplace la vieille terminologie de perspective linéaire et de perspective aérienne par une autre plus imagée : il distingue la *perspective du relief* et la *perspective de la couleur*.

A. BOULANGER.

Voir J.-H. LAMBERT : *Sur la perspective aérienne*, Mémoires de l'Académie de Berlin, 1774. GINO LORIA (Gênes).

4951 (**1919**, 100) (A. BOUTIN).— *Équations de Fermat simultanées.* — Il faut et il suffit que l'équation

$$bx^2 - az^2 = b - a$$

soit possible, ou, en d'autres termes, que l'on ait

$$\frac{a}{b} = \frac{x^2-1}{z^2-1}.$$

Exemple :

$y=2$; $3^2-2.2^2=1$, $5^2-6.2^2=1$, $7^2-12.2^2=1$, $9^2-20.2^2=1$,
$y=3$; $8^2-7.3^2=1$, $10^2-11.3^2=1$,
$y=4$; $7^2-3.4^2=1$, $9^2-5.4^2=1$, $15^2-14.4^2=1$, $17^2-18.4^2=1$.

ALLAN CUNNINGHAM.

Solution analogue de M. J. PACÉ.

4955 (**1919**, 100) (*Derennes*). — *Représentation d'une courbe.* — La proposition dont il s'agit n'est pas toujours vraie, car KRONECKER a démontré que la représentation analytique complète d'une courbe gauche exige en général *quatre* équations; et M. VAHLEN a fourni (*J. de Crelle*, t. 108, 1891) l'exemple d'une courbe du cinquième ordre qu'il est impossible de représenter par un nombre moindre d'équations. GINO LORIA (Gênes).

Autre réponse de M. H. BROCARD.

4958 (**1919**, 102) (A. AURIC). — *Points associés au centre du cercle circonscrit au triangle.* — D'une manière générale, si α, β, γ

sont les coordonnées barycentriques d'un point Q, les *isobariques* $Q_1(\beta, \gamma, \alpha)$ et $Q_2(\gamma, \alpha, \beta)$ de Q sont symétriques par rapport au complémentaire $Q'(\beta + \gamma, \ldots)$ de Q et le point $P(\beta - \gamma, \ldots)$ situé à l'infini sur $Q_1 Q_2$, souvent appelé *associé à l'infini de* Q, est le réciproque du pôle trilinéaire de la droite joignant Q au centre de gravité du triangle.

Quand Q est le centre du cercle circonscrit, on retrouve la propriété indiquée dans l'énoncé et l'on voit qu'en réalité le point P considéré est à l'infini sur $O'O''$ et que le centre Ω du cercle des neuf points est le milieu du segment $O'O''$.

R. Goormaghtigh (Mons).

Les coordonnées barycentriques de Ω sont

$$\sin A_1 \cos(A_2 - A_3), \qquad \sin A_2 \cos(A_3 - A_1), \qquad \sin A_3 \cos(A_1 - A_2);$$

celles de P sont

$$\cos A_1 \sin(A_2 - A_3), \qquad \cos A_2 \sin(A_3 - A_1), \qquad \cos(A_3 \sin A_1 - A_2);$$

d'où, par composition symbolique,

$$\Omega + P = \sin(A_1 + A_2 - A_3) = \sin 2A_3, \qquad \ldots,$$
$$\Omega - P = \sin(A_1 - A_2 + A_3) = \sin 2A_2, \qquad \ldots,$$

ce qui démontre la proposition.

A. Auric.

4960 (**1919**, 103) (A. Colucci). — *Construction d'un certain triangle isoscèle.* — Si un triangle isoscèle ABC, inscrit à un cercle O, a ses deux côtés égaux AB, AC passant par deux points donnés D, E, on voit que le rayon OA est la bissectrice de l'angle BAC.

Le problème **4960** est donc celui du billard circulaire (ou du miroir cylindrique) maintes fois étudié dans les journaux mathématiques, et qui a fait ici déjà l'objet de la question **1724** (**1900**, 7). Voir les réponses **1900**, 263 et 371.

Ce problème remonte, comme on le sait, à l'*Optique* d'Al Hazen. Voir **1900**, 263, et question **1725** (**1900**, 7), réponses **1900**, 324; **1901**, 168.

Il est résolu par la focale de Quetelet ou aussi par l'hyperbole équilatère (**1900**, 263).

Sur la circonférence donnée, il existe toujours deux points (qualifiés de brillants), un intérieur, l'autre extérieur, répondant à la

question; mais leur détermination ne peut se faire à la règle et au compas, exception seulement pour certaines situations très particulières des points D et E de départ et d'arrivée. H. BROCARD.

Autres réponses de MM. GOORMAGHTIGH, HENDLÉ et MARCHAY.

4961 (**1919**, 103) (A. COLUCCI). — ***Roulettes et glissettes.*** — Une mention particulière est due à la monographie publiée à Cambridge en 1870 par W.-H. Besant, intitulée : *Notes on Roulettes and Glissettes* (50 pages, 3 planches), dont les propositions essentielles ont été signalées en 1871 (*N. A.*, p. 284-286, 324-327, 432, 475-477 et 553-555).

Une seconde édition, refondue et augmentée, a paru en 1890 (99 pages, 5 planches).

Une bibliographie complète exigerait d'assez longues investigations. Je me bornerai à quelques références.

E. CATALAN, *Note sur la théorie des roulettes* (*N. A.*, 1856, p. 102-108), où il est montré que toute courbe plane est une roulette, celle d'un point M d'une droite qui roule sur la développée de cette même courbe.

Roulettes de coniques (*N. C.*, 1876, 373-386; 1877, 4-13, 33-40); étude où se trouve le principe de la corrélation très simple que voici entre la roulette et la glissette relatives à un même point :

L'équation de la glissette d'un point d'une courbe étant

$$\frac{x}{y} = f(y),$$

l'équation différentielle de la roulette de ce point sera

$$\frac{dy}{dx} = -f(y).$$

L'application de cette remarque à une vingtaine d'exemples classiques donne le sujet de comparaisons intéressantes et instructives.

E. HABICH, *Sur les roulettes* (*Mathesis*, 1882, p. 145-148).

F. BALITRAND. *Sur les courbes de Duporcq et de Mannheim* (*N. A.*, 1914, p. 97-106).

F. BALITRAND, *Note sur les roulettes et les glissettes planes à base rectiligne* (*N. A.*, 1915, p. 248-273). H. BROCARD.

Les trois ouvrages suivants renferment des indications bibliographiques sur les roulettes :

La Géométrie du mouvement, par Schönflies (Gauthier-Villars).

Collection *Scientia* : n° 31, *Systèmes cinématiques*, par Crelier; n° 34, *Les coordonnées intrinsèques*, par Braude.

P. HENDLÉ.

Dans la sixième Partie de l'Ouvrage G. LORIA, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven*, quatre longs chapitres (9-12; voir le Tome **2**, Leipzig, 1911, de la 2ᵉ édition) sont consacrés aux roulettes et glissettes. M. Colucci y trouvera de nombreuses indications historiques et bibliographiques. *Original.*

4962 (**1919**, 103) (A. COLUCCI). — *Démontrer que le lieu du point de rencontre des diagonales des quadrilatères de Poncelet est une quartique.* — La proposition est inexacte, car, quand il existe des polygones de Poncelet, leurs diagonales enveloppent des coniques, et, quand ces polygones ont un nombre pair de côtés, les diagonales qui joignent deux sommets opposés passent par un point fixe, ayant même polaire par rapport aux deux coniques données. Voir à ce sujet DARBOUX, *Principes de géométrie analytique*, Livre III, Chapitre II : « Les théorèmes de Poncelet » (Gauthier-Villars, 1917). P. HENDLÉ.

4963 (**1919**, 103) (A. GÉRARDIN). — *Système d'équations indéterminées*

$$x^2 + y^2 = A^2, \tag{1}$$

$$x + y^2 = B^2. \tag{2}$$

L'équation (1) est satisfaite par

$$x = t^2 - u^2, \qquad y = 2tu, \qquad A = t^2 + u^2.$$

Cela donne

$$t^2 - u^2 + (2tu)^2 = B^2$$

ou encore

$$B^2 - (4u^2 + 1)t^2 = -u^2.$$

Posons $u = 1, 2, 3, \ldots$. On obtient une suite d'équations de Fermat.

Chaque solution (B_1, b_1), (B_2, b_2), ... de toutes ces équations donne une solution (x, y, A, B) de la question proposée.

Exemple : $u = 1$ donne $B^2 - 5t^2 = -1$; d'où l'on tire

B.	b.	x.	y.	A.
2	1	0	2	2
38	17	288	34	290
682	305	93024	610	93026
...	...	.....	...	.....

Exemple : $u = 2$ donne $B^2 - 17t^2 = -1$; d'où l'on tire :

B.	t.	x.	y.	A.
8	2	0	8	8
536	130	16896	520	16904
...	...	.....	...	.....

Un autre système de solutions est donné par la solution de l'équation (1) :

$$x = \frac{1}{2}(t^2 - u^2), \qquad y = tu, \qquad A = \frac{1}{2}(t^2 + u^2);$$

d'où l'on tire

$$2B^2 - (2u^2 + 1)t^2 = -u^2.$$

En posant $u = 1, 2, 3, \dots$, on obtient une suite d'équations de Fermat, et de chaque équation on peut déduire une infinité de solutions (B, t); et de celles-ci on conclut de nouvelles solutions (x, y, A, B) de la question.

Exemple : $u = 1$ donne $(2B)^2 - 6t^2 = -2$; d'où l'on tire :

B.	t.	x.	y.	A.
1	1	0	1	1
11	9	40	9	41
109	89	3960	89	3961
...	..	....	..	....

Exemple : $u = 2$ donne $(2B)^2 - 18t^2 = -2, \dots$

ALLAN CUNNINGHAM.

On déduit une infinité de solutions de celles de

$$5u^2 - 1 = v^2$$

en prenant

$$x = u^2 - 1, \qquad y = 2u, \qquad A = u^2 + 1, \qquad B = v.$$

On a

$$u = 1, \quad 17, \quad 305, \quad 5473, \quad \ldots,$$
$$v = 2, \quad 38, \quad 682, \quad 12238, \quad \ldots,$$
$$u_{n+1} = 18u_n - u_{n-1}, \qquad v_{n+1} = 18v_n - v_{n-1}.$$

Pour le système proposé, on aura donc les solutions

$$x = 288, \quad y = 34, \quad A = 290, \quad B = 38,$$
$$x = 93024, \quad y = 610, \quad A = 93026, \quad B = 682, \quad \ldots.$$

De même, de

$$3\lambda^2 + 1 = \mu^2,$$

on déduit des solutions du système (x négatif) en prenant

$$x = 1 - \lambda^2, \qquad y = 2\lambda, \qquad A = \lambda^2 + 1, \qquad B = \mu.$$

On a

$$\lambda = 1, \quad 4, \quad 15, \quad 56, \quad \ldots,$$
$$\mu = 2, \quad 7, \quad 26, \quad 97, \quad \ldots,$$
$$\lambda_{n+1} = 4\lambda_n - \lambda_{n-1}, \qquad \mu_{n+1} = 4\mu_n - \mu_{n-1},$$

et, pour le système proposé, on trouve

$$x = -15, \quad y = 8, \quad A = 17, \quad B = 7,$$
$$x = -224, \quad y = 30, \quad A = 226, \quad B = 26. \quad \ldots.$$

R. GOORMAGHTIGH.

Autres réponses de MM. COLUCCI et DESPUJOLS.

4964 (**1919**, 104) (A. GÉRARDIN). — *Système d'équations indéterminées.* — Posons $m^3 = \mu(x + y)$. En divisant les trois équations données par $(x + y)$ et en arrangeant les termes, on obtient

$$(x^2 - xy + y^2) - 3(x - y)h + 3h^2 = A\mu,$$
$$(x^2 - xy + y^2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = B\mu,$$
$$(x^2 - xy + y^2) + 3(x - y)h + 3h^2 = C\mu.$$

Posons aussi $y - x = n$; nous aurons donc

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{m^3}{\mu} - n\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(\frac{m^3}{\mu} + n\right),$$

$$(B - C)\mu = 3nh - 3h^2, \qquad (A - C)\mu = 6nh,$$

$$(A - B)\mu = 3nh + 3h^2;$$

d'où l'on tire

$$(A + C - 2B)\mu = 6h^2.$$

Maintenant, si l'on prend m, h, μ tels que $m^3 = k\mu$, $h = k'\mu$ (tous entiers), et si l'on prend aussi n tel que $(k \mp n)$ soient pairs, les trois équations données seront satisfaites et les sept quantités h, x, y, m, A, B, C seront toutes entières.

Exemples : Prenons

$$k = 1, \quad k' = 1, \quad \mu = 5, \quad m = 3, \quad n = 1;$$

on déduit de nos formules

$$h = 1, \quad x = 13, \quad y = 14, \quad A = 189, \quad B = 183, \quad C = 183.$$

Prenons

$$k' = 1, \quad \mu = 1, \quad m = 7, \quad k = m^3 = 343, \quad n = 13,$$

on trouve la solution donnée par l'auteur.

Allan Cunningham.

Autre solution de M. Colucci.

4965 (**1919**, 104) (A. Gérardin). — *Forme trinome*

$$N = 2^{4x+2} - 2^{2x+5} + 1 = (2^{2x+1} - 3.2^{x+1} + 1)(2^{2x+1} + 3.2^{x+1} + 1).$$

Exemple : $x = 5$ donne

$$N = 2^{22} - 2^{15} + 1 = 4161537$$
$$= 2241.1857 = (2^{11} + 3.2^6 + 1)(2^{11} - 3.2^6 + 1)$$
$$= 81.83.619 \text{ (non pas } 81.43.619).$$

Allan Cunningham.

Réponse analogue de M. L. Marchay.

4966 (**1919**, 104) (A. Gérardin). — *Équation indéterminée.* — Choisissons deux entiers (inégaux) (a, b) tels que $a - b = 1$.

Posons $x = (1 \mp 2ab)$, $r = (a \pm b)$. Nous aurons toujours

$$(1^2 + 2a^2)(1^2 + 2b^2) = x^2 + 2r^2.$$

Exemple :

$$(1^2 + 2.4^2)(1^2 + 2.5^2) = 41^2 + 2.1^2.$$

Allan Cunningham.

On a identiquement

$$2(y - z)^2 + (2yz + 1)^2 = (1 + 2y^2)(1 + 2z^2);$$

d'où, en faisant $y - z = r$, $x = 2yz + 1$,

$$2r^2 + x^2 = (1 + 2y^2)(1 + 2z^2).$$

L. Marchay.

[Il y a une faute d'impression dans l'original (43 au lieu de 83).]

La formule suivante donne une double infinité de solutions :

$$\begin{aligned}
x &= 4(2\alpha^2 - \beta^2)^2 + 16\alpha\beta(4\alpha^4 - \beta^4) + 1,\\
r &= 8\alpha\beta(2\alpha^2 - \beta^2) + (2\alpha^2 + \beta^2)(32\alpha^2\beta^2 + 1),\\
y &= 2\alpha^2 + \beta^2,\\
z &= 2(2\alpha^2 - \beta^2) + 8\alpha\beta(2\alpha^2 + \beta^2).
\end{aligned}$$

Exemples :

$\alpha = 1$, $\beta = 0$; $\quad 17^2 + 2.2^2 = (2.2^2 + 1)(2.4^2 + 1)$,

$\alpha = \beta = 1$; $\quad 53^2 + 2.107^2 = (2.3^2 + 1)(2.26^2 + 1)$, ...

R. Goormaghtigh (Mons).

L'INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS.

N° 1-2. *SUPPLÉMENT.* JANVIER 1920.

BIBLIOGRAPHIE.

L'AÉRONAUTIQUE. — Revue publiée chez Gauthier-Villars et C^ie^.

Il vient de paraître un nouveau Périodique, uniquement consacré aux choses de l'Air.

C'est une Revue nouvelle, intitulée *L'Aéronautique*. Publiée avec la collaboration de la Direction aéronautique militaire et maritime, elle est luxueusement éditée par la Librairie Gauthier-Villars et C^ie^, 55, quai des Grands-Augustins, Paris. Elle contient une partie documentaire, une partie historique et une partie technique. Elle aspire à prendre, dans le domaine de l'aviation, le rôle que jouent dans leurs sphères respectives les journaux d'information ou d'étude, mais sa tendance est aussi d'intéresser le grand public par des études générales et par une abondante illustration.

ANNUAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES POUR L'AN 1919. — 1 vol. in-16 de VIII-671 pages avec 14 figures, 5 cartes célestes et 3 cartes magnétiques. Paris, 1919; Gauthier-Villars et C^ie^, éditeurs. Prix 3^fr^ broché.

Ch I. Calendrier; concordances. — Ch. II. La Terre. Formes et dimensions; pesanteur; météorologie; réfraction atmosphérique; magnétisme terrestre. — Ch. III. Astronomie. Coordonnées; temps; soleil; lune; planètes; comètes; constellations. — Ch. IV. Poids et mesures. Mesures légales; heures légales.

Le Chapitre V des années impaires est relatif aux statistiques géographiques et démographiques, aux tables d'annuités, de survie, d'intérêt et d'amortissement.

Les Notices traditionnelles intéressent l'une les mathématiciens,

l'autre les physiciens et astronomes : M. P. Appell présente une vue d'ensemble sur la théorie des figures d'équilibre relatif d'un liquide homogène en rotation, dont les éléments s'attirent suivant la loi de Newton ; M. M. Hamy fait un exposé précis de la détermination interférentielle des diamètres des astres. A. B.

G.-H. HALPHEN. — ŒUVRES publiées par les soins de C. Jordan, H. Poincaré, E. Picard, avec la collaboration de E. Vessiot. — Tome II. — 1 vol. in-8° (25 × 16) de VII-560 pages avec 1 portrait. — Paris, 1918 ; Gauthier-Villars et Cie, éditeurs. Prix 40fr.

Nous avons déjà dit l'intérêt très vif que présente la publication des œuvres d'Halphen, géomètre pénétrant qui a su joindre à la profondeur le souci de la clarté et de l'élégance.

Les travaux d'Halphen sont destinés à durer et, si tant est qu'on puisse désormais encore lire, à donner aux jeunes le goût des mathématiques.

Les 42 études réunies dans ce Tome II suivant l'ordre chronologique (1878-1882) ont surtout pour objet : la théorie des caractéristiques dans les coniques et les quadriqûes, les problèmes de Bertrand sur les lois de Képler, les singularités des courbes gauches algébriques, les lignes singulières des surfaces algébriques, les invariants différentiels, les propriétés des cubiques et sextiques planes, quelques points de la théorie des fonctions elliptiques et de leurs applications, certains développements en sériesde fonctions spéciales.

L'attention ne saurait trop être attirée sur les belles recherches d'Halphen concernant les courbes gauches algébriques : ce géomètre est le seul guide expérimenté qui puisse faciliter l'accès d'un domaine étendu, mais peu exploré. A.B.

THEORY AND APPLICATIONS OF FINITE GROUPS, par *G.-A. Miller H.-F. Blichfeldt, L.-E. Dickson*, 1re édition. — 1 vol. in-8° de XVIII-390 pages. New-York, John Wiley and Sons ; Londres, Chapman and Hall, 1916.

Cet Ouvrage didactique est divisé en 3 Parties : 1re Partie, Groupes de substitutions et groupes abstraits, par G.-A. Miller ;

2e Partie, Groupes finis de transformations linéaires homogènes, par H.-F. Blichfeldt; 3e Partie : Applications des groupes finis, par L.-E. Dickson. — Les trois auteurs, professeurs de Mathématiques dans les Universités américaines, ont dédié le Livre à C. Jordan, notre Maître à tous dans la Théorie des substitutions.

Le nom des auteurs est une garantie que le Livre ne peut être que fort intéressant : MM. G.-A. Miller et L.-E. Dickson, notamment, ont comme on sait, apporté une contribution étendue à la Théorie des substitutions. (1) E. M.

HISTORY OF THE THEORY OF NUMBERS, vol. I. DIVISIBILITY AND PRIMALITY, par *Leonard-Eugène Dickson* professeur de Mathématiques à l'Université de Chicago. — Un volume in 4° de XII — 486 pages, publié par l'Institution Carnegie de Washington, 1919.

C'est une œuvre considérable, au point de vue bibliographique et critique, entreprise par M. L.-E. Dickson, dont le nom est bien connu des lecteurs de *L'Intermédiaire*, œuvre que publie l'Institution Carnegie dont les services à la Science ne se comptent plus Chaque partie de Mémoire ou Note est analysée d'une manière aussi courte que possible. On est étonné de la profusion des renseignements donnés par l'Ouvrage qui devient indispensable à tous ceux qui s'occupent de Théorie des nombres. L'extrait suivant de la Table des matières permettra d'avoir idée du contenu du premier volume. — Nombres parfaits et amiables; théorèmes de Fermat et Wilson; résidus de $\frac{u^{p-1}-1}{p}$ (mod p) ; indicateur; fractions pério-

---

(1) Au sujet de l'avis de M. G.-A. Miller (p. 64), je dirai que, pour ma part, je trouve souvent plus simple d'étudier les groupes abstraits en les représentant sous la forme de groupes de substitutions de n lettres ou symboles (comp. *Encyclopédie des Sc. Math.*, édition française J. Molk, t. I, vol. I, fasc. 4, p. 581-583).

J'ai signalé aussi à M. L.-E. Dickson que j'ai, avant lui, établi et énoncé un résultat plus étendu que celui qu'il m'attribue (p. 365 de l'Ouvrage), et que je crois avoir entièrement démontré, sinon énoncé explicitement, le lemme de la page 365 lui-même (comp. *Mém. Assoc. franc. Avanc. Sciences*, *Saint-Étienne*, p. 195-197, et mes travaux subséquents, *C. R. Acad. Sc.*, 11 avril 1904, p. 891 et 1012, *Annales Fac. Sc. Toulouse* 2e série, t. VI, 1904, p. 277 et 280-283).

diques; racines primitives; congruences; sommes et nombres de diviseurs; divisibilité; tables de facteurs; nombres de Fermat; facteurs de $a^n \pm b^n$; séries récurrentes; théorie des nombres premiers inversion des fonctions; propriété des chiffres d'un nombre.

E. M.

LES SPECTRES NUMÉRIQUES, par *Michel Pétrovitch*, professeur à l'Université de Belgrade. — 1 fascicule in-8° de VIII — 110 pages Paris. — Gauthier-Villars et Cie, 1919.

En dehors de la préface de M. E. Borel, cet Ouvrage comprend une Introduction et 4 Parties intitulées : 1° Spectres numériques; 2° un mode de correspondance entre les fonctions d'une variable et les suites de nombres entiers; 3° spectres des fonctions d'une variable ; 4° la méthode spectrale.

C'est, dit M. E. Borel dans la préface, « une intéressante contribution à l'étude des relations entre les fractions décimales et les séries de puissances entières d'une variable ».

Voici comment s'expliquent le titre et, à peu près, le point de départ de la terminologie de M. Pétrovich : la représentation d'un nombre N dans le système de base 10 (ou q) peut être définie comme étant le spectre de N; cette représentation ou ce spectre comprendra des tranches de chiffres significatifs (tous $\neq 0$), séparés par des tranches de 0; les premières tranches correspondent aux parties brillantes, les deuxièmes aux parties sombres du spectre.

Je renverrai à la préface pour l'éloge de l'œuvre de M. Pétrovitch, et à l'introduction et aux communications des *C. R. Acd. Sc.* (1917-1918) qui y sont mentionnées, pour un aperçu plus détaillé du contenu du Livre.

On voit que certaines de ces idées se rattachent aux notions de fonction génératrice de nombres, ou même, au fond, à celle de représentation d'un nombre à l'aide de séries, fractions continues, etc., formées avec un nombre ζ (systèmes de numération généralisés) que j'ai moi-même beaucoup utilisées, notamment dans mon Introduction à la *Théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions* (Paris, Gauthier-Villars 1906, chap. IV et V par exemple).

E. M.

FERMAT'S LAST THEOREM, THREE PROOFS BY ELEMENTARY ALGEBRA by M· *Cashmore.* Revised Edition.

M. Cashmore donne dans cet opuscule trois démonstrations du «dernier théorème de Fermat»

Dans la première, il admet que si $w = ap^2 + ncq^2$ est puissance $n^{\text{ième}}$ (n premier), il existe des entiers positifs t et u tels que

$$\begin{aligned} ap^2 + ncq^2 &= (p\sqrt{a} + q\sqrt{-nc})(p\sqrt{a} - q\sqrt{-nc}) \\ &= (t\sqrt{a} + u\sqrt{-nc})^n (t\sqrt{a} - u\sqrt{-nc})^n \\ &= (at^2 + ncu^2)^n, \end{aligned}$$

ce qui me paraît être faux, ou du moins non démontré.

Dans la seconde, ayant posé $x^n + y^n = (x + y - b)^n$ et appelant k le plus grand commun diviseur de $n + y$ et de b, l'auteur posant

$$b = ks \quad x + y = ku$$

admet que k et s sont premiers entre eux, ce qui n'est pas nécessaire.

Dans la troisième enfin, posant $x^n + y^n = \left(x + \frac{p}{q} y\right)^n$ (p, q premiers entre eux), d'où

$$\begin{aligned} q^n y^{n-1} = n_1 x^{n-1} q^{n-1} p + n_2 x^{n-2} q^{n-2} p^2 y + \ldots \\ + n_1 x q p^{n-1} y^{n-2} + p^n y^{n-1}, \end{aligned}$$

M. Cashmore tire de là $y = pqy_1$, alors qu'on en conclut seulement $y^{n-1} \equiv 0 \pmod{p.q}$

Le temps me manque pour examiner la répercussion de ces inadvertances sur la suite des démonstrations, mais celles-ci ont besoin d'être revues, et une fois de plus le décourageant théorème gl sse entre les doigts du chercheur. *Zéro.*

Cours de Géométrie analytique, par *G. Bouligand,* professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Rennes. — 1 vol. in-8° ($22^{cm} \times 14^{cm}$) de VIII + 421 pages. Vuibert, éditeur; Paris, 1919. — Prix : 12 fr.

Depuis 1882, année où parut le *Traité* (malheureusement resté inachevé) de M. H. Picquet, il ne semble pas qu'on ait publié en France de livre original sur la Géométrie analytique (les *Principes* de G. Darboux étant d'un autre ordre). Dans cet Ouvrage, les méthodes générales étaient exposées en leur lumineuse simplicité, et le lecteur gardait une impression de beauté bien propre à exciter chez lui le goût de la science. Les Manuels plus récents semblent avoir été écrits dans un autre but; on ne pouvait mieux faire, on a fait autrement, sous le couvert de programmes nouveaux.

Le Cours de M. Bouligand se rattache à la bonne tradition de H. Picquet, et il témoigne de ce que, avec le programme actuel des classes de Mathématiques spéciales, on peut donner un enseignement bref, intéressant, personnel, et satisfaire aux exigences à la fois de la pédagogie et de l'esthétique.

Poussant à la fois l'étude de la Géométrie du plan et celle de la Géométrie de l'espace, non point en une juxtaposition de fortune, mais en une réelle pénétration réciproque, l'Auteur a franchement abattu les lourds échafaudages des symbolismes accessoires et balayé le fatras des détails inutiles; puis, de l'édifice un peu maigre ainsi dégagé, il a renforcé l'ossature en exposant les méthodes fécondes de transformation, la dualité, l'homographie, l'inversion; en introduisant logiquement les éléments imaginaires; en distinguant avec précision les propriétés linéaires et les propriétés métriques des figures.

L'emploi simultané de la Géométrie pure et de la Géométrie analytique, contradictoire en un sens, nuit un peu à l'unité d'esprit, mais peut se défendre en bonne logique et allège l'exposé. Mainte démonstration se trouve renouvelée et réduite à presque rien.

Bref, voilà une Géométrie analytique habillée à la mode du jour : son vêtement, un peu court de tous côtés, un peu léger et fort transparent, ne voile guère son corps souple et vigoureux.

Aura-t-elle du succès ? Comme elle le mérite, il en faut douter.

I. U.

GAUTHIER-VILLARS & Cie

Imprimeurs-Éditeurs

55, Quai des Grands-Augustins, PARIS (6e)

REVUES DE DOCUMENTATION

La documentation est devenue l'un des plus grands besoins de notre époque ; dans tous les domaines, les recherches s'étendent et se multiplient. L'homme d'étude se voit de plus en plus dans l'obligation d'avoir sous la main des instruments spécialisés, susceptibles d'orienter ses investigations.

La Librairie GAUTHIER-VILLARS et Cie édite et met à la disposition du monde savant plusieurs *revues de documentation scientifique*, et les recommande à l'attention des chercheurs, auxquels elles sont appelées à rendre de précieux services.

CATALOGUE INTERNATIONAL DE LA LITTÉRATURE SCIENTIFIQUE, publié par une COMMISSION internationale sous la direction de M. le Dr **H. Forster Morley.** Volume in-8 (21-27). *Chaque année forme* 17 volumes.

Prix des 17 volumes ensemble .... 450 fr.

Chaque fascicule se vend séparément :

		fr.			fr.
A.	Mathématiques	18,75	K.	Paléontologie	13,10
B.	Mécanique	13,10	L.	Biologie générale	13,10
C.	Physique	30 »	M.	Botanique	46,90
D.	Chimie	46,90	N.	Zoologie	48,75
E.	Astronomie	26,25	O.	Anatomie humaine	18,75
F.	Météorologie	18,75	P.	Anthropologie physique	18,75
G.	Minéralogie	20,65	Q.	Physiologie	48,75
H.	Géologie	20,65	R.	Bactériologie	26,25
J.	Géographie	20,65			

Douze années sont en vente (1902-1914)

Depuis la 6e année, le fascicule N *Zoologie* est divisé en plusieurs parties qui se vendent séparément aux prix suivants :

Zoologie générale, 3 fr. 10 c. — *Protozoaires*, 2 fr. 50 c. — *Porifères*, 2 fr. 50 c. — *Coelentérés*, 2 fr. 50 c. — *Echinodermes*, 4 fr. 35 c. — *Vermidiens*, 3 fr. 75 c. — *Brachiopodes et Polyzoaires*, 2 fr. 50 c. — *Mollusques*, 5 fr. — *Arthropodes (en général)*, 2 fr. 50 c. — *Crustacés*, 3 fr. 10 c. — *Trilobites, Arachnides, Myriapodes*, 4 fr. 35 c. — *Insectes*, 15 fr. — *Prochordés*, 1 fr. 85 c. — *Vertébrés (en général)*, 1 fr. 85 c. — *Poissons*, 3 fr. 10 c. — *Reptiles et Batraciens*, 3 fr. 10 c. — *Oiseaux*, 7 fr. 50 c. — *Mammifères*, 3 fr. 10 c. — *Liste des abréviations et des périodiques*, 2 fr. 50 c. — *Liste des genres nouveaux*, 2 fr. 50 c.

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, rédigé par MM. ÉMILE PICARD et P. APPELL, avec la collaboration de MM. *M. Brillouin*, *E. Cartan*, *J. Drach*, *E. Goursat*, *C. Guichard*, *J. Hadamard*, *G. Kœnigs*, *G. Loria*, *S. Rindi*, *H.-G. Zeuthen*; *Ern. Lebon*, Secrétaire de la Rédaction, sous la direction de la Commission des Hautes Études (Publication fondée en 1870 par MM. G. DARBOUX et J. HOUËL). In-8 (25-16), mensuel. **IIe Série.** Tome XLIII; 1919. (54e volume de la Collection.)

Le Bulletin des Sciences mathématiques a formé par an, jusqu'en

1872, un volume in-8 (25-16) (Tomes I, II, III). A partir de cette époque jusqu'en décembre 1876, le Journal s'est composé de deux volumes in-8 (25-16) par an (*un volume par semestre, avec tables*).

La deuxième série, commencée en janvier 1877, continue à paraître par livraisons mensuelles et comprend chaque année deux parties ayant une pagination spéciale et pouvant se relier séparément. La Ire PARTIE contient : 1° *Comptes rendus de livres et analyses de mémoires*; 2° *Mélanges scientifiques, traductions de mémoires importants et peu répandus et réimpression d'ouvrages rares*. La IIe PARTIE contient : *Revue des publications académiques ou périodiques*.

Prix de l'abonnement annuel :

Paris	40 fr.
Départements et Union postale	42 fr.

La TABLE *d'un des volumes du* Bulletin *est envoyée franco, comme spécimen, à toute personne qui en fait la demande par lettre affranchie.*

BIBLIOGRAPHIE SCIENTIFIQUE FRANÇAISE. Recueil mensuel publié, sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique, par le Bureau français du Catalogue international de la littérature scientifique. In-8 (25-16). Tome XV (année 1918).

Prix de l'abonnement annuel :	Paris	Départ. et Union postale
	fr	fr
1re Section : *Sciences mathématiques et physiques* (6 numéros par an)	10 »	11 »
2e Section : *Sciences naturelles et biologiques* (6 numéros par an)	10 »	11 »
Les deux sections réunies	20 »	22 »

REVUE GÉNÉRALE DES TRAVAUX ASTRONOMIQUES, publiée par l'OBSERVATOIRE DE PARIS. In-8 (25-16); mensuel. Tome I; 1919.

Prix de l'abonnement annuel :

Paris	32 fr.
Départements et Union postale	34 fr.

Cette revue fait suite au **Bulletin astronomique**. Elle donne l'analyse de tous les travaux astronomiques récemment parus, les mémoires originaux étant réservés à une publication qui sera annoncée ultérieurement. Elle paraît mensuellement par fascicules d'environ 48 pages chacun.

BULLETIN D'ABONNEMENT

à renvoyer à la Librairie GAUTHIER-VILLARS et Cie
55, Quai des Grands-Augustins, PARIS (6e).

Je déclare souscrire un abonnement pour l'année 1920 :

au *Catalogue international de la littérature scientifique ;*
à la *Bibliographie scientifique française ;*
au *Bulletin des sciences mathématiques ;*
à la *Revue générale des travaux astronomiques.*

Ci-joint le montant, en un mandat postal — en un chèque sur Paris.

Nom : ....

Profession : ....

Adresse : ....

NUIVERSITATUM ET EMINENTIUM SCHOLARUM

INDEX GENERALIS

ANNUAIRE GÉNÉRAL DES UNIVERSITÉS
THE YEARBOOK OF THE UNIVERSITIES

PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION

DE

R. de MONTESSUS de BALLORE

Docteur ès Sciences, Professeur libre à la Faculté des Sciences de Paris
avec l'encouragement du Ministère de l'Instruction Publique

Pour remplacer un Annuaire allemand, la Librairie Gauthier-Villars etC[ie] va faire paraître, incessamment sous ce triple titre, un ouvrage contenant l'organisation des Facultés et des Écoles d'enseignement supérieur de tous les pays autres que l'Allemagne, l'Autriche-Hongrie, la Turquie et la Bulgarie, avec le nom de chaque professeur et l'indication de la matière qu'il enseigne. Des dispositions ultérieures seront prises en ce qui concerne ces quatre pays.

Cet Index paraîtra annuellement.

Il est destiné à renseigner : 1° *les professeurs de toutes écoles et nationalités* qui cherchent des renseignements corporatifs : il sera donc continuellement entre les mains du personnel enseignant ;

2° *les étrangers désirant venir suivre des cours en France*: il sera consulté par les étudiants de toutes les Universités étrangères.

Il intéresse en outre un grand nombre d'industriels qui ont des relations avec les savants : chimistes, physiciens, naturalistes, etc.

Les renseignements concernant les Facultés d'un pays seront rédigés, sauf exceptions, dans la langue de ce pays et seront donnés, non pas en supposant à toutes les Facultés du monde une organisation identique, mais en respectant l'organisation exacte de la Faculté. On ajoutera au volume les renseignements nécessaires à l'intelligence des termes techniques donnés dans des langues étrangères.

C'est dire que l'**INDEX** sera d'un usage excessivement pratique. La présentation très claire, la composition faite en caractères suffisamment variés, en feront rapidement un ouvrage de documentation et de travail très recherché.

Prix : { Broché.................... 18 fr. net.
Relié.................... 21 fr. net.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, PARIS (6e)

Majoration temporaire : 50 %

APPELL (Paul), Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences de Paris, et **DAUTHEVILLE (S.)**, Professeur de Mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences de l'Université de Montpellier. — **Précis de Mécanique rationnelle**. *Introduction à l'Étude de la Physique et de la Mécanique appliquée* à l'usage des candidats aux certificats de licence et des Élèves des Écoles techniques supérieures. 2e édition revue et augmentée. In-8° (25-16) de VIII-734 pages, avec 230 figures, 1917 .... 50 fr.

AUTONNE (Léon), Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Professeur-adjoint honoraire à la Faculté des Sciences de l'Université de Lyon. — **Sur les matrices hypohermitiennes et sur les matrices unitaires.** (ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON). In-8 (25-16) de IV-78 pages, 1915 .... 5 fr.

BANACHIEWICZ (Thadée), Membre de la Société des Sciences de Varsovie, Agrégé de l'Université impériale et Assistant à l'Observatoire astronomique de Jurieff (Dorpat). — **Tables fondamentales pour la résolution de l'équation de Gauss** $\sin(z-q) = m \sin^4 z$ **dans la détermination d'une orbite planétaire**, *le nombre de décimales y étant conforme à l'exactitude du calcul de l'orbite à 7 décimales.* In-4 (33-25) de 28 pages; 1916 .... 5 fr.

BÔCHER (Maxime), Professeur à l'Université Harvard, Professeur agrégé à l'Université de Paris. — **Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes**, professées à la Sorbonne en 1913-1914, recueillies et rédigées par GASTON JULIA, Élève de l'École Normale supérieure. In-8 (25-16) de VI-118 pages; 1917 .... 5 fr.

BOREL (Émile), Professeur de Théorie des Fonctions à l'Université de Paris. — **Leçons sur la Théorie des fonctions.** (*Éléments et principes de la Théorie des ensembles; applications à la Théorie des fonctions.*) 2e édition. In-8 (25-16) de XII-260 pages avec figures; 1914. 7 fr. 50

BOUSSINESQ (J.), Membre de l'Institut. — **Calcul des vitesses bien continues de régime uniforme par des polynomes**, *dans les tubes cylindriques de formes diverses, avec application à une évaluation approximative du coefficient de débit, dans la filtration de l'eau à travers des sables à grains plus ou moins fins.* In-4 (28-23), de 48 pages avec 2 figures, 1915 .... 2 fr. 50

BOUSSINESQ (J.), Membre de l'Institut. — **Réflexions sur la longue durée de la Dynamique rudimentaire d'Aristote et sur son rôle capital jusqu'au jour où fut créée l'Analyse infinitésimale.** In-4 (28-23) de 16 pages; 1915 .... 1 fr.

MONTESSUS de BALLORE (R. de), Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille. — **Exercices et Leçons de Mécanique analytique.** *Centre de gravité. Attraction. Potentiel. Moment d'inertie. Dynamique des corps solides et des systèmes. Les fonctions elliptiques dans le domaine réel.* In-8 (23-14) de VI-334 pages, avec 72 figures; 1915 .... 12 fr.

61620-20 Paris, Imprimerie Gauthier-Villars Cie, 55, quai des Grands-Augustins

Le Gerant : A. DUCROT.

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS

FONDÉ EN 1894 PAR C.-A. LAISANT ET ÉMILE LEMOINE

DIRECTEUR-FONDATEUR

C.-A. LAISANT

Docteur ès Sciences
Ancien Examinateur à l'École Polytechnique

DIRECTEURS-RÉDACTEURS

Ed. MAILLET
Docteur ès Sciences
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées
Examinateur à l'École Polytechnique

A. MALUSKI
Agrégé de Mathématiques
Ancien Élève de l'École Normale supérieure
Proviseur du Lycée de Sceaux

A. BOULANGER
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers
Répétiteur et Examinateur d'admission à l'École Polytechnique

---

Publication honorée d'une souscription du Ministère de l'Instruction publique

---

TOME XXVII — 1920

N^os 3 et 4. — MARS-AVRIL 1920

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C^ie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1920

Ce Recueil paraît chaque mois

VOIR LES AVIS DIVERS ET LA CORRESPONDANCE à la page 2 de la Couverture

SOMMAIRE DES N^{os} 3 ET 4.

S'adresser, pour la rédaction, à M. *Ed. Maillet*, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, 11, rue de Fontenay, Bourg-la-Reine, ou à M. *A. Maluski*, proviseur du Lycée Lakanal, à Sceaux, ou à M. *A. Boulanger*, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, rue Gay-Lussac, 30, Paris; pour les abonnements et les tirages à part, à MM. *Gauthier-Villars et C^{ie}*, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Rédacteur de service : M. A. MALUSKI, proviseur du lycée Lakanal à Sceaux (Seine).

QUESTIONS récentes de MM. Aillet, Aubry, Balitrand, Despujols, Gérardin, Imbert, Gino Loria, Morel, Nagel, J. Pacé, Poulet, *R. Ratat*, H. Sebban, J. Ser, H. Woodall.

RÉPONSES récemment reçues de MM. Auric, **4893**, **4933**, **4964**, **4986**, **4991**; Brocard, **4545**, **4981**, **4982** et addition, **5009**, **5019**, **5027**; Casheuvre, **4832**; Cunningham, **4973**; Delaporte, **5026**; Despujols, **4722**, **4744**, **4880**, **4897**; Goormaghtigh, **4973**; Hendlé, **4910**; Marchay, **2425**, **5010**; Nagel, **2228**; Pacé, **4991**; Poulet, **4905**; *R. Ratat*, **4930**, **4951**, **4966**, Sebban, **5009**, **5027**; Verger, **5009**; Worms, **4951**.

AVIS DIVERS. — M. Kraitchik a calculé une table des valeurs de x satisfaisant à $2^x - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, pour toutes les valeurs de p inférieures à 300.000.

En annexe, on trouvera des décompositions inédites des nombres de la forme $2^x \pm 1$.

Il tient le manuscrit à la disposition d'un éditeur éventuel, 16, rue Ganse, à Bruxelles.

M. A. Cunningham, communique le problème d'arithmétique amusante : la somme des âges de Marie et de Anne est de 44 ans. Marie a deux fois l'âge qu'avait Anne quand Marie avait la moitié de l'âge qu'aura Anne lorsque celle-ci aura trois fois l'âge qu'avait Marie quand Marie avait trois fois l'âge d'Anne. Trouver les deux âges.

Nous prions nos Correspondants de rappeler leur adresse dans chacun de leurs envois; de *n'écrire que sur le recto de la feuille*. Les formules doivent être écrites et les figures *faites avec le plus grand soin*, de façon qu'elles ne prêtent à aucune ambiguïté pour l'impression, particulièrement en ce qui concerne les indices, les signes, etc. En général, rien de ce qui est à imprimer ne doit être oublié, la ponctuation par exemple. La dactylographie est recommandée. Enfin, nous prions nos correspondants d'une manière tout à fait instante, de s'attacher, dans la mesure du possible, à ne pas omettre, lorsqu'ils citent un périodique, l'année de la publication, renseignement aussi important que celui de sa tomaison.

QUESTIONS.

5028. [**K'1b**] Appelant K le point de Lemoine de tout triangle (de coordonnées normales proportionnelles aux côtés), je considère un quadrilatère plan de quatre droites A, B, C, D. Le point K du triangle BCD est le sommet d'un faisceau involutif où le rayon mené par chaque sommet de BCD est conjugué de la direction du côté opposé : j'y détermine le rayon $K_A\alpha$ conjugué de la direction de la quatrième droite A. Les triangles CDA, DAB, ABC déterminent trois autres droites $K_B\beta$, $K_C\gamma$, $K_D\delta$. Montrer qu'elles concourent avec $K_A\alpha$ en un même point M : en M la somme des carrés des distances aux quatre droites est *minima*.

Considérer aussi les associés algébriques de K.

H. de Montille.

5029. [**H1a**] Le théorème de Weierstrass dit « de préparation » dont la démonstration se trouve dans le Tome 2 des *Mathematische Werke von Karl Weierstrass* (p. 135), dans le Tome 2 du *Traité d'Analyse* de M. Picard (p. 263), dans le Tome 2 du *Traité d'Analyse* de M. Goursat (p. 284) et que M. Goursat a établi élémentairement (*Bulletin de la Société mathématique*, t. 36, 1908, p. 209) a été établi en 1879 par H. Poincaré dans sa Thèse en suivant les méthodes de Cauchy. Il paraît qu'il aurait été établi par Cauchy lui-même. Je demande l'indication bibliographique précise qui confirmerait ce renseignement venu de Scandinavie.

Is. Uber.

5030. [**I19c**] Il est facile de démontrer qu'on peut,

d'une infinité de manières, trouver trois carrés entiers α^2, β^2, γ^2 formant une progression par différence. Peut-on trouver quatre carrés entiers α^2, β^2, γ^2, δ^2 pour lesquels il en soit de même, ou démontrer l'impossibilité de ce problème?

Nemo.

5031. [**N⁴2b**]. Chasles a énoncé le théorème suivant :

a. Le lieu des foyers des paraboles d'un système de caractéristiques (μ, ν) *est une courbe d'ordre* $\left(\frac{\mu}{2}+\nu\right)$ *qui admet les points cycliques pour points multiples d'ordre* $\frac{\mu}{2}$.

Il n'a pas, à ma connaissance, étudié davantage les propriétés des paraboles (μ, ν).

De mon côté, j'ai montré (*Courbes géométriques remarquables*, par Brocard et Lemoyne, t. 1, p. 267 et 269) que :

b. L'enveloppe des axes des paraboles (μ, ν) *est une courbe de classe* $3\frac{\mu}{2}$ *admettant la droite de l'infini pour tangente multiple d'ordre* μ, *les points cycliques étant points de contact d'ordre* $\frac{\mu}{2}$;

c. L'enveloppe des directrices des paraboles (μ, ν) *non tangentes à deux droites rectangulaires est une courbe de classe* ν, *admettant la droite de l'infini pour tangente multiple d'ordre* $\nu-\frac{\mu}{2}$. *Si le foyer est donné, l'enveloppe est une courbe de classe* $\frac{\mu}{2}$.

Je trouve en outre que :

d. Le lieu des sommets des paraboles (μ, ν) *est une courbe d'ordre* $\frac{3\mu}{2}+\nu$ *qui admet les points cycliques pour points multiples d'ordre* $\frac{\mu}{2}$, *les tangentes en ces points*

aux $\frac{\mu}{2}$ *branches de courbe qui y passent se confondant avec la droite de l'infini. Si le foyer est donné, le lieu des sommets est d'ordre* μ *et admet encore les points cycliques pour points multiples d'ordre* $\frac{\mu}{2}$; *si la directrice est donnée, le lieu est d'ordre* ν.

Ainsi, le lieu des sommets des paraboles qui touchent une droite donnée en un point donné est une quintique bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques; le lieu des sommets des paraboles de foyer donné touchant une conique à centre, est une courbe du douzième ordre admettant les points cycliques pour points sextuples, etc.

e. L'enveloppe des tangentes aux sommets des paraboles (μ, ν) *est une courbe de classe* $\mu + \nu$, *qui admet la droite de l'infini pour tangente multiple d'ordre* $\nu + \frac{\mu}{2}$, *les points cycliques étant points de contact d'ordre* $\frac{\mu}{2}$.

Ainsi, l'enveloppe des tangentes aux sommets des paraboles inscrites à un triangle est une hypocycloïde à trois rebroussements.

Je désirerais connaître les études publiées sur les paraboles (μ, ν) et, en dehors des théorèmes précédents, les résultats obtenus.

T. Lemoyne.

5032. [N^4 2h] Dans le *Journal de Crelle*, t. 49, p. 273, Steiner a énoncé les deux théorèmes suivants :

Le nombre des coniques qui passent par trois points et ont un contact du second ordre avec une courbe générale d'ordre m est $3m(m-1)$.

Le nombre des coniques qui passent par trois points et sont bitangentes à une courbe générale d'ordre m est

$$\frac{1}{2}(m^2-m)(m^2+3m-6).$$

Je trouve, de mon côté, que :

Si une courbe de classe n, possédant ρ rebroussements, admet les points A, B, C *pour points multiples d'ordres p, q, r, les tangentes en ces points étant distinctes et la courbe n'étant pas tangente aux côtés de* ABC, *le nombre des coniques passant par* A, B, C *et osculatrices à la courbe est*

$$\rho + 3n - 2p - 2q - 2r.$$

Si une courbe d'ordre m, de classe n, ayant ρ rebroussements, admet respectivement les points A, B, C *pour points multiples d'ordres p, q, r, les tangentes en ces points étant distinctes et la courbe n'étant pas tangente aux côtés de* ABC, *le nombre des coniques passant par* A, B, C *et bitangentes à la courbe est*

$$\frac{1}{2}[(n+2m)(n+2m-2p-2q-2r)-3\rho] \\ -(5n+2m-4p-4q-4r).$$

Si, dans ces formules, on fait

$$\rho = p = q = r = 0 \quad \text{et} \quad n = m(m-1),$$

on retrouve les formules de Steiner.

Je désirerais connaître les formules qui donnent les nombres analogues pour les coniques osculatrices ou bitangentes, qui touchent deux tangentes multiples d'ordres p et q de la courbe algébrique, et passent par un point multiple d'ordre r de cette courbe. T. LEMOYNE.

5033. [**M' 7 c**] Je désirerais connaître des propriétés des courbes de classe n à tangente multiple d'ordre $n-1$ en dehors de la suivante :

L'enveloppe des asymptotes des courbes d'ordre m appartenant à un faisceau ponctuel est une courbe de classe $2m-1$ qui admet la droite de l'infini pour tangente multiple d'ordre $2(m-1)$.

Et de celle qui s'en déduit immédiatement en projetant la droite de l'infini suivant une droite D du plan.

T. LEMOYNE.

5034. [**P'6**] Montrer que si, à chaque cycle d'un plan H, on fait correspondre le centre de l'une des sphères de rayon nul contenant le cycle, toute transformation ponctuelle conforme de l'espace est représentée sur le plan H par une transformation de contact qui change un cycle quelconque du plan en un autre cycle et réciproquement (théorème de Lie).

En particulier, établir les relations suivantes :

1° Les dilatations, dans le plan, correspondent aux translations perpendiculaires au plan H.

2° La transformation par semi-droites réciproques représente, sur le plan H, la symétrie par rapport à un plan non parallèle à H. Vérifier analytiquement ce résultat (*voir* dans COMBEROUSSE et ROUCHÉ, *Géométrie plane*, un article de Laguerre).

3° La transformation de Ribaucour représente sur le plan H l'inversion par rapport à une sphère dont le centre n'est pas situé sur H. En déduire qu'elle revient à une inversion effectuée dans le plan H, précédée ou suivie d'une dilatation.

Note. — La transformation de Ribaucour fait correspondre à un élément de contact dirigé formé par un point M et une semi-droite MT, l'élément de contact (M', M'T') obtenu comme il suit : par M, on trace le cercle K orthogonal à MT et à un cercle fixe S. Si α, α' sont les points d'intersection de S et K, M' est le point du cercle K défini par $(\alpha, \alpha', M, M') = \text{const.}$, M'T' est le rayon du cercle K passant par M'.

BUTIN.

5035. [**D6c**] 1° Vu leur usage en astronomie, les nombres de Bernoulli ont été calculés jusqu'à un certain rang (une

soixantaine). Mais il est intéressant de remarquer que ces bernoulliens B_n ne sont que la fonction continue

$$B(x) = 2.(2\pi)^{1-2x}\Gamma(2x-1)\zeta(2x),$$

pour x entier, Γ désignant l'intégrale eulérienne de deuxième espèce, et $\zeta(u)$ la fonction de Riemann : $\sum_1^\infty \frac{1}{n^u}$. On choisit pour B_n le signe voulu et la plus petite échelle d'indices : à chaque entier n répond un $B_n \neq 0$. On ne doit même pas se borner aux x réels. L'étude de $B(x)$ est-elle faite, par exemple, dans les œuvres d'Adams ?

2° Je signale aussi la fonction

$$Z(s, a) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^s + a},$$

qui est à séparer nettement de

$$\sum \frac{1}{(a+bn)^s} = \psi(s, a, b),$$

dont les relations avec $\frac{d\,L\,\Gamma(z)}{dz}$, L étant un logarithme népérien, sont connues depuis longtemps.

$Z(s, a)$ a-t-elle une bibliographie ?

H. DE MONTILLE.

5036. [I13f] Considérons les deux séries associées de Pell

$$T_1'^2 - DU_1'^2 = T_2'^2 - DU_2'^2 = \ldots = T_r'^2 - DU_r'^2 = -1,$$
$$T_1^2 - DU_1^2 = T_2^2 - DU_2^2 = \ldots = T_r^2 - DU_r^2 = +1,$$

où T_1', U_1', T_1, U_1 sont *minima*.

Démontrer que $(T_\mu'^2 + T_\rho'^2 + 1)$ et $(T_\mu^2 + T_\rho^2 + 1)$ sont toujours résolubles en deux facteurs. Trouver les facteurs (L, M) de

$$N' = (T_r'^2 + T_1'^2 + 1) = L_r'.M_r',$$

et

$$N_r = (T_r^2 + T_1^2 - 1) = L_r.M_r.$$

En formant les deux séries de N'_r et N_r, $[r=1, 2, 3, \ldots]$, démontrer que les facteurs (L'_r, M'_r), (L_r, M_r) se répètent suivant les règles

$$M'_{r-1}=L'_r, \qquad M'_r=L'_{r-1}; \qquad M_{r-2}=L_r, \qquad M_r=L_{r+2},$$

en sorte que les séries

$$N'_1, N'_2, N'_3, \ldots, N'_r), \quad (N_2, N_4, N_6, \ldots, N_{2\rho}), \quad (N_3, N_5, N_7, \ldots, N_{2\rho+1})$$

forment des *chaînettes* de nombres, et les facteurs (L, M) en sont les *chaînons*. ALLAN CUNNINGHAM.

5037. [**M'7c**] Je désirerais connaître des exemples de lieux géométriques donnant des courbes du septième ordre.

T. LEMOYNE.

5038. [**M'7c**] Je demande des propriétés des courbes du septième ordre à point sextuple en dehors de la suivante :

Le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point P *aux courbes de quatrième classe d'un faisceau tangentiel, est une courbe du septième ordre qui admet le point* P *pour point sextuple.* T. LEMOYNE.

5039. [**A1**] Existe-t-il des formules donnant les sommes

$$0^n C_m^0 + 1^n C_m^1 + 2^n C_m^2 + \ldots + m^m C_m^m,$$
$$0^n C_m^0 - 1^n C_m^1 + 2^n C_m^2 - \ldots + (-1)^m m^n C_m^m,$$
$$0^n.0! + 1^n.1! + 2^n.2! + \ldots + m^n.m!$$

G. MÉTROD.

5040. [**K'14b**] Les questions 4916 et 4932 et la réponse de M. Brocard à 4916 me suggèrent la question suivante :

« Existe-t-il toujours un polyèdre admettant pour nombre des sommets, des faces et des arêtes, trois nombres satisfaisant à la formule d'Euler. Sinon, quelle est la condition suf-

fisante pour que trois nombres donnés tels que

$$S + F = A + 2$$

conviennent à un polyèdre ? » G. Métrod.

5041. [**I1**] Prouver qu'il y a toujours un nombre premier dont l'inverse donne lieu à un développement périodique simple avec une période de n figures, n étant un nombre quelconque, premier ou composé. Howarth.

5042. [**I7**] Le nombre des racines incongrues de

$$\sqrt[k]{a} \equiv \sqrt[k]{g^x} \pmod{p},$$

p étant un nombre premier, est égal au plus grand commun diviseur (n) de K et $p - 1$, pourvu que l'exposant x soit un multiple de n. Dans le cas contraire, le nombre des racines est réduit à zéro. Woodall.

5043. [**I**] Soit donnée la fonction rationnelle entière $f(x)$ de degré n à coefficients entiers. Désignons par N_m le nombre des solutions de la congruence

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p^m},$$

où p est un nombre premier. Si p ne divise pas le discriminant D de $f(x)$, il est bien connu qu'on a

$$N_1 = N_2 = \ldots = N_m \leqq n.$$

Existe-t-il une telle borne supérieure des nombres N_m dans le cas où D est divisible par p? Si très spécialement $f(x)$ est un polynome irréductible du second degré, on démontre sans peine que le nombre N_m ne peut pas surpasser $2|\sqrt{D}|$. T. Nagel (Christiania).

RÉPONSES.

1493 (**1899**, 98; **1911**, 27) (*Quærens*). — *Former l'identité*

$$\lambda f + \mu\varphi = 1$$

entre quatre polynomes entiers, f, φ de degré n et λ, μ de degré $(n-1)$. — Cette question, demeurée ici non résolue, n'est autre que celle de l'identité dite de Bezout, qui peut s'établir même plus généralement pour des polynomes donnés f, φ, de degrés m et p, et pour des polynomes λ, μ de degrés $(p-1)$ et $(m-1)$ au plus.

C'est ce que l'on trouvera exposé dans un article de M. B. Gambier : *Pour l'identité de Bezout* (*N. A.*, 1919, p. 284-297).

La même question paraît avoir été visée par H. Laurent, sous le n° **2535** (**1903**, 65), mais la réponse mentionnée **1904**, 101, n'a pas été publiée depuis.
H. Brocard.

2162 (**1901**, 219; **1916**, 125) (*H. Braid*). — *Équation de la chaînette* (**1919**, 75). — Le célèbre Mémoire de Navier sur les *Ponts suspendus* a été publié en 1823 (Paris, Imprimerie royale). On y trouve (p. 65) l'équation de la chaînette sous la forme suivante :

$$R - py = \frac{1}{2}\left[R - \sqrt{R^2 - Q^2}\right] e^{\frac{px}{Q}} + \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{R - \sqrt{R^2 - Q^2}}\, e^{-\frac{px}{Q}},$$

que l'auteur déduit de l'équation

$$x = \mp \frac{Q}{p} \log \frac{R - py + \sqrt{(R - py)^2 - Q^2}}{R - \sqrt{R^2 - Q^2}}$$

à laquelle le conduit son calcul.

Mais, dans la deuxième édition des *Éléments de Mécanique* de Boucharlat, parue en 1827 (Paris, Bachelier), l'équation de la chaî-

nette est donnée (p. 119) sous l'unique forme :

$$x = a \cos\alpha \log \left[\frac{a - y \sqrt{(a-y)^2 - a^2 \cos^2\alpha}}{a(1 - \sqrt{1 - \cos^2\alpha})} \right].$$

P. Hendlé.

2375 (**1902**, 170; **1919**, 136) (H. Brocard). — *Surface réglée, enveloppe du plan, mené en un point* M *d'une courbe gauche* Γ, *perpendiculairement au rayon vecteur* OM. — Soient Δ et ρ l'axe polaire et le rayon de courbure de Γ en M, λ l'angle de OM avec la tangente *t* en M, δ la distance de O au plan osculateur. On a les propriétés suivantes qui nous paraissent nouvelles :

1° *La caractéristique g du plan mobile considéré se trouve dans le plan mené perpendiculairement à t par le symétrique de* M *par rapport au plan normal.*

2° Le point central C de cette génératrice *g* de la surface s'obtient par la propriété suivante :

Si P *est l'intersection de* Δ *avec la perpendiculaire élevée en* M *sur* OM *dans le plan normal, et* Q *la projection sur g du symétrique de* O *par rapport au plan rectifiant, le vecteur* $\overline{\text{QC}}$ *est double du vecteur* $\overline{\text{MP}}$.

3° *Pour l'arête de rebroussement de la surface enveloppe, la binormale en* C *est parallèle à* OM, *et le rapport de la torsion à la courbure en* C *est égal à* $\frac{\rho}{\delta}\sin^3\lambda$.

R. Goormaghtigh.

En transformant par inversion par rapport au point fixe, on obtient l'enveloppe des sphères passant par ce point et dont le centre parcourt une courbe connue (homothétique, dans le rapport $\frac{1}{2}$ de l'inverse de la courbe donnée).

C'est la question posée dans l'*I. M.* sous le n° **4075** (**1912**, 75; **1913**, 34). Ma réponse (**1913**, 36) était précisément basée en partie sur l'inversion et renfermait implicitement la réponse à la question **2375**.

Il y a lieu toutefois d'y rectifier comme suit la construction du second système de lignes de courbure de l'enveloppe des sphères, que j'y indiquais d'une façon inexacte : « En transformant par inversion l'arête de rebroussement de l'enveloppe (lieu des symétriques du point fixe par rapport aux plans osculateurs à la courbe lieu des centres des sphères), on a une courbe dont les développantes, transformées par la même inversion, donnent le second système cherché de lignes de courbure. »

P. Hendlé.

2535 (**1903**, 65) (H. Laurent). — *Détermination de polynomes* λ, μ, ν, φ, *satisfaisant à la condition*

$$\lambda\mu + \nu\varphi = 1$$

(**1904**, 101). — La réponse (*loc. cit.*) étant une simple annonce, une réponse nouvelle nous paraît motivée et justifiée par une étude publiée tout récemment, due à M. B. Gambier, et intitulée : *Pour l'identité de Bezout* (*N. A.*, 1919, p. 284-297).

Il s'agit de l'identité

$$AU + BV = 1,$$

où A et B sont des polynomes entiers en x de degrés m et p, avec

$$U = U_1 + Bf(x),$$
$$V = V_1 - Af(x),$$

$f(x)$ étant un polynome arbitraire, U_1 et V_1 satisfaisant à la condition

$$AU_1 + BV_1 = 1.$$

Note. — Il est à désirer que des exemples de ces polynomes soient donnés explicitement dans une autre étude.

H. Brocard.

2600 (**1903**, 152) (G. Ricalde). — *Relation entre les nombres n et P vérifiant la congruence* $1.2.3\ldots n+1 \equiv 0 \pmod{P}$. — La question ne semble pas bien posée : il ne faut pas considérer le produit continu des nombres consécutifs à partir de l'unité c'est-à-dire $n!+1$, mais le produit des nombres successifs premiers à P et rangés dans l'ordre croissant, de 1 à n.

Autrement, le nombre n n'existe pas, par exemple, pour tous les nombres composés multiples de 3; parmi les multiples de 5, il n'existe que pour le carré 25; parmi les multiples de 7, il n'existe que pour 7 lui-même; de même pour les multiples de 11, etc.

Au lieu que, dans l'autre supposition, et quels que soient n et P premiers entre eux, avec $n < P$, on pourra toujours déterminer un nombre n tel que, $\psi(n)$ désignant le produit de tous les nombres premiers à P jusqu'à n inclus, on ait

$$\psi(n) \equiv -1 \pmod{P}.$$

La première chose à faire est de dresser un tableau des valeurs de n pour les petites valeurs successives de P. En les associant sous

forme de fraction $\frac{n}{p}$, on trouve

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{3}{7},\ \frac{5}{8},\ \frac{4}{9},\ \frac{9}{10},$$

$$\frac{5}{11},\ \frac{7}{12},\ \frac{12}{13},\ \frac{13}{14},\ \frac{13}{15},\ \frac{5}{16},\ \frac{16}{17},\ \frac{7}{18},\ \frac{9}{19},\ \frac{11}{20},$$

$$\frac{19}{21},\ \frac{9}{22},\ \frac{14}{23},\ \frac{19}{24},\ \frac{4}{25},\ \frac{17}{26},\ \frac{8}{27},\ \frac{15}{28},\ \frac{18}{29},\ \frac{23}{30}.$$

$$\frac{30}{31},\ \frac{13}{32},\ \frac{31}{33}.\ \frac{33}{34},\ \frac{33}{35},\ \frac{7}{36},\ \frac{36}{37},\ \frac{17}{38},\ \frac{37}{39},\ \frac{11}{40}.$$

E. MALO.

3474 (**1908**, 272) (G. HITROVO). — *Un horoscope attribué à Euler* (**1919**, 178). — Je crois devoir ajouter quelques mots à ma première réponse (*loc. cit.*).

La question a trait à un des trop nombreux drames sanglants de la Cour de Russie, demeurés mystérieux et soigneusement cachés au public. Il s'agit de l'ombre de règne d'un empereur au berceau, dont Euler aurait été appelé à dresser l'horoscope.

Sans élever le moindre doute aux allégations formulées dans la question, il n'y a probablement pas à espérer de parvenir à une preuve décisive.

Euler a-t-il laissé des notes d'astrologie? Ou bien a-t-il donné à penser qu'il s'y est intéressé? Il semblerait justifié d'affirmer que l'astrologie judiciaire a dû être connue et pratiquée par Euler, à en juger d'après l'extrait suivant d'une lettre, adressée à Grimm, où Catherine II de Russie écrivait : « Euler nous prédit la fin du monde pour le mois de juillet de l'année qui vient; il fait venir tout exprès pour cela deux comètes qui feront je ne sais quoi à Saturne, qui, à son tour, viendra nous détruire. »

Il ne m'a pas été possible de vérifier cette référence, ni à quelle date il faut la rapporter.

H. BROCARD.

3937 (**1911**, 242) (J. NEUBERG). — *Enveloppe des cordes communes à une cycloïde et au cercle générateur dans ses diverses positions.* — Le cercle générateur, pour une position O de son centre, touche la base Δ de la cycloïde en D, fournit le point P de la courbe, et recoupe celle-ci en Q; on demande de déterminer l'enveloppe de la corde PQ, ainsi que le point de contact M de cette corde avec cette enveloppe (M). Nous avons donné une solution de ce problème dans

une Note qui paraîtra aux *Nouvelles Annales*, et que nous résumons ci-après.

Soient O′ la position du centre du cercle générateur quand celui-ci fournit le point Q de la cycloïde, et D′ le point de contact du cercle O′ avec Δ; appelons en outre 2α et 2β les angles POD, QO′D′. On établit alors, par des considérations élémentaires, les relations

$$(1) \qquad \widehat{QPD} = \beta, \qquad \beta - \sin 2\beta = \alpha;$$

la première renferme le théorème de M. Naraniengar, rappelé dans l'énoncé, la seconde est, à la forme près, une propriété établie par M. Sankara Aiyar.

Désignons ensuite par ds et ds' les éléments d'arcs décrits par les points P et Q; on sait que leur rapport est égal, d'après les formules de Mannheim, au rapport des segments des normales en P et Q à la cycloïde, compris entre ces points et l'intersection de ces normales avec celle à (M) en M. D'autre part, on déduit une seconde valeur pour ce rapport de la relation

$$(1 - 2\cos 2\beta)\frac{d\beta}{ds'} = \frac{d\alpha}{ds}\cdot\frac{ds}{ds'},$$

obtenue par dérivation de la seconde égalité (1). Remarquant enfin que $\frac{d\alpha}{ds}$ et $\frac{d\beta}{ds}$ représentent les courbures de la cycloïde en P et Q et sont donc inversement proportionnels à PD et QD′, on trouve facilement la construction suivante pour le point M :

Si l'on projette en S *sur* QD′ *le point d'intersection de la perpendiculaire élevée en* D *sur* QD *avec la tangente au cercle* O′ *en* Q, *le point* M *divise* PQ *en segments proportionnels aux projections* de PD *et* QS *sur* PQ.

Connaissant le rapport de section de M sur PQ, il est facile de déduire les coordonnées de ce point de celles de P et Q et de les exprimer, au moyen de la seconde relation (1), en fonction du seul angle β; on trouve ainsi, comme équations paramétriques de l'enveloppe,

$$x = a\left\{\beta - \sin\beta\,\frac{[\sin 2\beta + \sin(\beta - \sin 2\beta)]\cos(\beta + \sin 2\beta) + \cos 3\beta\sin(\beta - \sin 2\beta)}{\cos 2\beta\sin(2\beta - \sin 2\beta)}\right\},$$

$$y = a\left\{1 - \frac{\sin\beta\cos(\beta - \sin 2\beta)\cos(\beta + \sin 2\beta) + \cos\beta\cos 3\beta\sin(\beta - \sin 2\beta)}{\cos 2\beta\sin(2\beta - \sin 2\beta)}\right\}$$

R. Goormaghtigh.

4133 (**1912**, 266), **4429** (**1914**, 169) (M. Lecat). — *Permanents à*

éléments inactifs. Extrémés. — Le principal problème posé est le suivant : *Dans une matrice générale, déterminer un domaine neutre, d'étendue donnée, de manière à extrémer le plus petit vide rendant inactif au moins ce domaine pour le permanent de genre g* (en particulier, $g = n$, classe de la matrice). Nous appelons *domaine* d'une matrice tout ensemble de *points* de la matrice: *l'étendue* du domaine est le nombre de ses points. Le domaine est *neutre* quand à tous ses points sont attachés des éléments neutres (*généraux*).

Cette question est traitée, parmi d'autres concernant l'inactivité dans un Mémoire inséré dans les *Annales Soc. scient. Bruxelles*, t. 39 (1919-1920), 2e Partie, p. 39-67, particulièrement nos 9-11, p. 50-55.

M. LECAT (Bruxelles).

4639 (**1916**, 97) (P. APPELL). — *Généralisation de la formule de Riemann* (**1916**, 167; **1918**, 57). — Un hasard de lecture m'a fait retrouver trois études antérieures à la question et une quatrième, toute récente se rapportant au même objet.

Ces références pourront donc servir de réponse partielle à la question posée par M. P. Appell.

La formule donnant la courbure moyenne d'une surface comme divergence d'un vecteur unitaire porté par la normale,

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c'}{\partial y} + \frac{\partial c''}{\partial z}$$

(c, c', c'' sont les cosinus directeurs de la normale au point courant x, y, z de la surface), ainsi qu'une formule analogue pour la courbure totale, ont été données primitivement par C.-W. Borchardt.

Ces formules ont été très récemment retrouvées par M. F.-C. Clapier, qui a pris l'expression de la courbure moyenne pour point de départ de recherches de doctorat.

C.-W. BORCHARDT, *Sur la quadrature définie des surfaces courbes* (*J. M.*, 1854, p. 369-394).

Deux théorèmes de M. Borchardt sur les fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique et sur les rayons de courbure principaux des surfaces (*N. A.*, 1855, p. 26-27).

C. CLAPIER, *Sur la recherche des surfaces minima* (*N. A.*, 1914, p. 359-363).

F.-C. CLAPIER, *Sur les surfaces minima ou élassoïdes* (Thèse présentée en mai 1919 à la Faculté des Sciences de Paris pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences mathématiques, p. 45).

E. TURRIÈRE.

Au sujet des mêmes références, voir *Ens. math.*, 1919, p. 392-393, l'article de M. Turrière relatif à la thèse de M. Clapier.

LA RÉDACTION.

4689 (**1916**, 220) (E.-N. BARISIEN). — *Sur une question d'orthographe* (**1917**, 47 ; **1919**, 83, 115, 143; *voir* aussi **1900**, 389). — En feuilletant pour la première fois les fascicules de 1915 à 1918 de l'*Intermédiaire* (¹), nous y trouvons posée une question que l'on peut trouver futile (Joseph Bertrand qui fût, durant la seconde moitié du siècle passé, notre maître à tous, ne la jugeait point telle): la question de l'orthographe des mots *polynome*, *binome*, *monome*, et, à ce propos, des mots *isoscèle* et *parallélépipède*. On y a répondu en 1917. Du reste, déjà en 1900, la question avait été posée ici même; Paul Tannery y donna une réponse prompte et décisive : l'*Intermédiaire* voulut bien la compléter en y joignant notre propre réponse, où le côté historique de la question avait reçu tout son développement.

Nous revenons brièvement sur la question.

Secrétaire à l'Académie des Sciences et membre de l'Académie française, Bertrand se piquait d'écrire correctement le français. Or, ni lui, ni Paul et Jules Tannery, ni Poincaré, membre lui aussi de l'Académie des Sciences et lui aussi l'un des Quarante, ne consentirent à mettre l'accent circonflexe sur la désinence de *polynome*, *binome*, *monome*, et la prononciation correspondant à ce circonflexe ne leur plaisait pas davantage. L'usage contraire est, en effet, condamnée par l'étymologie. L'origine de ces mots se trouve dans la terminologie grecque, telle que nous l'a transmise l'école euclidienne. Avec Euclide, les Anciens appelaient *binome* ou *lignes de deux noms* εὐθεῖα ἐκ δύο ὀνομάτων, toute grandeur d'une des formes $a + \sqrt{b}$, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, $a + \sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{a} + \sqrt[m]{b}$; les composantes s'appelaient τά ὀνόματα, ou les *termes*. Le moyen âge, à la suite de *Campanus* (XIIIᵉ siècle), a rendu en latin cette expression par *linea binominis*, *linea binomialis*, ou simplement *binomium :* les modernes ont conservé ce dernier mot *binomium* et l'adjectif *binomialis*.

Par homologie, les modernes ont formé les mots hybrides *polynome* et *monome*, en substituant au préfixe latin *bi* les préfixes *poly* et *mono* (par abréviation, *mo*). Simon Stévin (1548-1620),

(¹) Durant quatre années et demi, nous avons été sevrés de toute lecture de périodiques français : à Louvain, où nous écrivons ces lignes, on prétendit ne nous éclairer, cinquante-deux mois durant, qu'à la seule lumière de la culture allemande. Le lecteur nous excusera si nous n'apportons ici que de tardives réponses. (*Belga*).

dont les Ouvrages exercèrent une grande influence sur l'écriture et sur la langue mathématiques, n'a pas cependant la responsabilité de ces deux mots hybrides : il emploie sans cesse les mots *multinomies*, *binomies*, *trinomies*; le mot *monome* est postérieur à lui. Le *Dictionnaire de Trévoux* définit le *monome* : ce qui ne se compose que de grandeurs de même nom; cette définition est conforme à l'esprit euclidien.

A l'exemple de Bertrand, les mathématiciens contemporains ont donc bien fait, en leurs publications, même les plus officielles comme les *Comptes rendus* de l'Institut, de supprimer l'accent circonflexe dans *binome*, *polynome* et *monome*, malgré l'autorité de Littré, qui n'avait pas lu le livre X d'Euclide (l'étymologie qu'il propose pour *monome* le prouve) et malgré l'Académie.

Quant à *isoscèle*, d'ἴσος, égal, et σκέλος, jambe, Littré s'accorde avec les mathématiciens pour déclarer incorrecte la forme *isocèle*; la terminaison *cèle* n'est à sa place que dans les mots techniques de la science médicale : elle dérive de κήλη, tumeur. *Parallélipipède* est incorrect : *parallélépipède* est conforme à l'étymologie : παράλληλος, parallèle, et ἐπίπεδον, surface.

Il est fâcheux que sur le sol français, qui a produit tant d'excellents hellénistes, tels que Henri Estienne, l'illustre auteur du *Thesaurus* grec, et Viète, le créateur de l'Algèbre littérale, on ait laissé s'acclimater, et souvent pour toujours, des termes d'une incorrection étymologique insupportable. Le type de ces mots incorrects devenus indéracinables, est bien le mot *kilomètre* et ses congénères *kilogramme*, etc. Il eût fallu écrire *chiliomètre*, car χίλιοι existe et signifie mille, et κίλος n'existe point : quant à χίλος (foin) et à κίλλος (bourrique), ces mots n'ont certes aucun rapport avec les Mathématiques ni avec les mathématiciens. *Belga.*

4792. A. Boutin (**1918**, 2). — *Développements suivant certains polynomes.* — I. Soit

$$P_n = x(x-1)\dots(x-n+1),$$

on en déduit

$$xP_n = P_{n+1} + nP_n.$$

Posons

$$x^n = A_{n,n}P_n + A_{n,n-1}P_{n-1} + \dots + A_{n,k}P_k + \dots + A_{n,1}P_1$$

et multiplions les deux membres par x, il vient

$$x^{n+1} = P_{n+1}A_{n,n} + P_n(nA_{n,n} + A_{n,n-1}) + \dots \\ + P_k(kA_{n,k} + A_{n,k-1}) + \dots + P_1,$$

ce qui donne la formule de récurrence

$$(1)\qquad A_{n+1,k} = kA_{n,k} + A_{n,k-1},$$

qui permet de calculer les nombres A :

n \ k :	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1								
2	1	1							
3	1	3	1						
4	1	7	6	1					
5	1	15	25	10	1				
6	1	31	90	65	15	1			
7	1	63	301	350	140	21	1		
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

De la formule (1) on déduit en remplaçant $A_{n,k}$ par

$$A_{n-,1k-1} + kA_{n-1,k},$$

$$(2)\qquad A_{n+1,k} = A_{n,k-1} + kA_{n-1,k-1} + k^2 A_{n-1,k-1} + \dots + k^i A_{n-i+1,k-1} + \dots.$$

En remplaçant $A_{n,k-1}$ par

$$(k-1)A_{n-1,k-1} + A_{n-1,k-2},$$

on obtient :

$$(3)\qquad A_{n+1,k} = kA_n^k + (k-1)A_{n-1}^{k-1} + (k-2)A_{n-2}^{k-2} + \dots.$$

II. Représentons par P'_n ce que devient P_n quand on remplace x par $x+1$, on a

$$P'_n = P_n + nP_{n-1},$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}(x+1)^n &= P'_n + A_{n,n-1}P'_{n-1} + \dots + A_{n,k}P'_k + \dots + P'_1 \\ &= P_n + A_{n+1,n}P_{n-1} + A_{n+1,n-1}P_{n-2} + \dots \\ &\quad + A_{n-1,k}P_{k-1} + \dots + A^2_{n+1}P_1 + 1,\end{aligned}$$

ce qui montre que les coefficients du développement de $(x+1)^n$ sont les mêmes que ceux du développement de x^{n+1}.

III. On peut représenter les coefficients A par une formule.

Posons

$$P_n = P_n(x),$$

on a

$$P_n(\nu) = 0, \qquad \text{pour} \quad \nu < n,$$
$$P_n(\nu) = C_n^\nu \nu! \qquad \text{pour} \quad \nu \geqq n,$$

la lettre C représentant les combinaisons.

Dans l'expression de x^n remplaçons x par

$$1.2.3\ldots n,$$

il vient

$$1^n = A_{n,1} C_1^1,$$
$$2^n = A_{n,1} C_2^1 + A_{n,2} C_2^2 2!,$$
$$3^n = A_{n,1} C_3^1 + A_{n,2} C_3^2 2! + A_{n,3} C_3^3 3!,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\nu^n = A_{n,1} C_\nu^1 + A_{n,2} C_\nu^2 2! + \ldots + A_{n,\nu} C_\nu^\nu \nu!,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$n^n = A_{n,1} C_n^1 + A_{n,2} C_n^2 2! + \ldots + A_{n,n} C_n^n n!.$$

On a un système de n équations dont les n inconnues sont

$$A_{n,1}, \quad A_{n,2}, \quad \ldots, \quad A_{n,n}$$

et que l'on peut résoudre par les règles de Cramer. Les coefficients A sont ainsi mis sous la forme de déterminants. Mais on peut les résoudre plus simplement de la manière suivante :

Pour déterminer $A_{n,\nu}$ multiplions les ν premières équations respectivement par

$$-C_\nu^1, \quad +C_\nu^2, \quad -C_\nu^3, \quad \ldots, \quad (-1)^\nu C_\nu^\nu,$$

et ajoutons en remarquant que

$$\sum_{h=\nu}^{h=\mu} (-1)^h C_h^\mu C_\nu^h = 0 \qquad \text{pour } (\mu < \nu),$$
$$(-1)^\nu C_\nu^\nu C_\nu^\nu = (-1)^\nu,$$

il vient

$$(-1)^\nu \nu! A_{n,\nu} = -1^n C_\nu^1 + 2^n C_\nu^2 - \ldots + (-1)^\nu \nu^n C_\nu^\nu;$$

d'où

$$A_{n,\nu} = \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \sum_{a=1}^{a=\nu} (-1)^a a^n C_\nu^a.$$

G. MÉTROD.

4843 (**1918**, 74) (M. SERVANT). — *Problème de l'aiguille sur un réseau rectangulaire.* — Je ne puis dire si la solution désirée se

trouve dans l'Ouvrage de L. BOUDIN : *Leçons de calcul des probabilités*, etc., mais je suis porté à croire qu'il pourra y aider, à en juger d'après le compte rendu récemment paru au *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1^re Partie, 1919, p. 129-133.

Je conseille de s'y référer.

Note. — Le problème pour un réseau de parallèles de même intervalle a été déjà visé ici dans les questions **203**, 517 et 711. *Voir* la Table générale, p. 117.

H. BROCARD.

4859 (**1918**, 98) H.-B. MATHIEU. — *Propriété des nombres* 343 et 81 (**1919**, 28, 192). — Dans sa réponse (**1919**, 192), M. J. Pacé affirme que le seul cube ou le seul bicarré, qui, ajouté à ses parties aliquotes, donne pour somme un carré, est 7^3 ou 3^4; or il eût fallu dire : le seul cube ou le seul bicarré de nombre premier, car la question n'est aucunement résolue pour des nombres composés et ne peut même pas l'être par la même méthode.

De plus, M. Pacé affirme que l'équation

$$(x^2+x)(x^2+1) = (a+1)(a-1)$$

n'admet que $x = 3$, $a = 11$, mais il n'en a pas donné la démonstration, ni indiqué où l'on peut la trouver; en voici une très simple :

Soit

$$x^4+x^3+x^2+x+1 = a^2$$

et d'abord x impair, on a :

$$(2x^2+x+2)^2-5x^2 = 4a^2,$$

$$x = mn, \qquad 2x^2+x+2\pm 2a = 5m^2,$$

$$2x^2+x+2\mp 2a = n^2,$$

$$5m^2+n^2 = 4x^2+2x+4 = 4m^2n^2+2mn+4;$$

donc, en appelant k le plus grand des deux nombres m et n, et l le plus petit, on a l impair :

$$4k^2l^2+2kl+4 < 6k^2 \qquad (l=1)$$

et, pour $m = l = 1$,

$$5+n^2 = 4n^2+2n+4 \qquad (n=-1),$$

ou, pour $n = l = 1$,

$$5m^2+1 = 4m^2+2m+4 \qquad (m=3)$$

et

$$x = 3, \qquad a = 11.$$

Soit maintenant x pair, on a

$$x = 2y \qquad (a \text{ impair})$$

et

$$(4y^2 + y + 1) - 5y^2 = a^2,$$

$a^2 + 5y^2$ ne pouvant être divisible par 4, $4y^2 + y + 1$ est impair et, par suite, y est pair et l'on a

$$y = 2mn,$$
$$4y^2 + y + 1 \pm a = 10m^2, \qquad 4y^2 + y + 1 \mp a = 2n^2,$$
$$5m^2 + n^2 = 4y^2 + 1 = 16m^2n^2 + 2mn + 1;$$

donc, en appelant k le plus grand des deux nombres m et n, et l le plus petit, on a :

$$6k^2 > 16k^2l^2 + 2kl + 1 \qquad (l = 0),$$
$$1 = 5m^2 + n^2 \qquad (m = 0,\ n = 1,\ x = 0).$$

L. Aubry.

4870 (**1919**, 122) (H. de Montille). — *Sur un lieu géométrique.* — On peut clore cette question, qui émane d'un ancien problème d'E. Dewulf, dont le vrai lieu est depuis entré dans la bibliographie des *Nouvelles Annales* (novembre 1919, p. 439). J'ai signalé le premier l'ordre du lieu et donné le mode de génération que voici :

Tout revient à étudier la section du lieu par un plan de coordonnées arbitraire Pyz, sur lequel les coniques (C), (c), et la droite (n) sont les traces de (S), (s) et (N). Rejetons homologiquement (n) à l'infini : accentuons la transformée. Le conjugué M′ de l'infini sur Δ est le milieu des points doubles de l'involution. Mais ceux-ci, points de contact de Δ avec les deux coniques qui la touchent dans le faisceau ponctuel (C′, c'), ont pour lieu une cubique *générale* menée par P et par les quatre points A′, B′, C′, D′, communs à C′, c', où ses tangentes concourent en P (lieu de Mac-Laurin). Et le lieu unicursal de M′, milieu des cordes Δ de cette cubique, en est une à point double P.

Donc, sur la figure primitive, le lieu de M est une surface du troisième ordre à point conique en P, engendrée par le lieu des points qui, sur Δ, sont conjugués harmoniques de son intersection avec (N), par rapport aux deux points où Δ perce la *surface lieu*

des contacts des tangentes menées de P *au faisceau ponctuel* (S, *s*), ce qui revient à une surface-lieu de Mac Laurin pour ces contacts.

On voit comment elle coupe harmoniquement les génératrices du point conique. H. DE MONTILLE.

4888 (1919, 3) (G. BOULLOUD). — *Propriété du quadrilatère complet* (1919, 90). — L'exactitude de la propriété résulte du théorème de Steiner (*Annales de Gergonne* t. 18, p. 302; *Gesammelte Werke*, t. 1, p. 223), énoncé par M. J. Mention (*N. A.*, 1862, p. 16) comme il suit :

« Dans chacun des quatre triangles formés par les côtés d'un quadrilatère, il y a un cercle inscrit et trois cercles exinscrits; ce qui fait en tout seize cercles, dont les centres sont quatre par quatre sur une circonférence, de manière à donner naissance à huit nouveaux cercles. Ces huit nouveaux cercles se partagent en groupes, tels que chacun des quatre cercles de l'un de ces groupes coupe orthogonalement tous les cercles de l'autre groupe; on en conclut que les centres des cercles des deux groupes sont sur deux droites rectangulaires. Enfin ces deux dernières droites se coupent au point de rencontre des cercles circonscrits aux quatre triangles. »

Ce théorème, communiqué sans démonstration par M. Steiner, est démontré par M. J. Mention (*loc. cit.*, p. 16-20 et 65-66).

Les 16 centres se partagent donc de deux manières différentes en groupe de 4, situés sur 4 cercles, dont les centres sont en ligne droite. Chaque cercle de l'un de ces groupes est orthogonal à *tous* les cercles du faisceau, défini par l'autre groupe.

Quant aux axes radicaux de ces deux faisceaux de cercles, après avoir démontré que *les deux quadrilatères ayant pour sommets les points de rencontre des bissectrices opposées internes ou externes, et les points de rencontre internes-externes, sont tels que la médiane* (ligne unissant les milieux des trois diagonales) *de l'un coïncide avec la ligne des hauteurs* (la ligne passant par les points de rencontre des hauteurs des quatre triangles formés par les côtés du quadrilatère) *de l'autre*, M. Mention ajoute que ces axes ne sont autre chose que les médianes susdites. [*Voir* aussi le paragraphe 2 de *Propriétés des quadrilatères complets qui ressortent de la considération de leurs bissectrices*, par M. L. Sancery (*N. A.*, 1875, p. 145).]

N.-R. PEKELHARING (Az. Groningen, Pays-Bas).

4903 (1919, 35) (S. WIGERT). — *Équations de Fermat simultanées* (1919, 123). — La solution complète de l'équation

$$y^2 = z^2 + 3x'^2.$$

est donnée par les deux systèmes :

$$y = 3m^2 + n^2 \qquad \pm z = 3m^2 - n^2, \qquad x' = 2mn,$$

$$y = \frac{1}{2}(3m^2 + n^2), \qquad \pm z = \frac{1}{2}(3m^2 - n^2), \qquad x' = mn.$$

Le premier système est inadmissible pour la raison donnée par M. Boutin, mais avec le deuxième on a

$$9m^2n^2 - 2\left(\frac{3m^2 + n^2}{2}\right)^2 = 1,$$

d'où

$$9m^4 - 12m^2n^2 + n^4 = -2$$

qui admet

$$m = n = 1.$$

Il est très probable qu'il n'y a pas d'autre solution, mais la démonstration rigoureuse doit être assez difficile à obtenir.

L. AUBRY.

Nous avons reçu de M. A. Arwin (Lund, Suède) une réponse trop longue pour être insérée, et qui est basée sur la théorie des nombres algébriques.

LA RÉDACTION.

4907 (**1919**, 36) (F. BALITRAND). — *Abel et Cauchy*. — Il convient de ne point attribuer à la boutade d'Abel — « Cauchy est fou, et avec lui il n'y a point moyen de s'entendre » (*Lettre à Holmboe*, du 24 octobre 1826) — plus d'importance que ne le faisait Abel lui-même.

Payant tribut à l'humaine nature, l'illustre Cauchy joignait à son génie et à de magnifiques qualités quelques fâcheux défauts, d'ailleurs passionnément exagérés par ses détracteurs contemporains. On racontait que, très affable et bienveillant, mais impuissant à maîtriser son esprit toujours en travail de nouvelles découvertes, il dirigeait d'instinct la conversation sur ses propres recherches; que, facile à aborder, il écoutait un instant et avec intérêt l'indication de l'objet de vos travaux, puis vous interrompait pour discuter devant vous dans un savant monologue vos premiers résultats, ou bien, vous laissant poursuivre votre exposé, suivait lui-même distraitement son propre crayon, qui traçait les premières lignes de quelque démonstration géniale — soudainement improvisée sous vos yeux — de vos découvertes personnelles. La part faite aux exagérations des ennemis de Cauchy, on comprend que la visite d'Abel au grand géomètre français, en octobre 1826, ait laissé à Abel un

souvenir mêlé d'admiration et d'humeur. Au surplus, le jeune et timide savant norvégien parlait malaisément le français dans les premiers mois de son séjour à Paris, et il savait que ses travaux antérieurs, publiés les uns par lui-même en langue norvégienne, les autres par Crelle en langue allemande, n'avaient pu être lus par Cauchy, qui n'apprit l'allemand qu'en 1832.

Si la boutade d'Abel ne trouvait son explication suffisante là où nous venons de le dire, dans les savants travers de conversation de l'académicien français, nous indiquerions une autre hypothèse explicative. En cette même année 1826, la politique intérieure de la France était on ne peut plus brûlante; la presse, libre de toute censure, livrait au roi et aux ultramontains les assauts les plus furieux. Si Cauchy et Abel, au cours de leurs entretiens, abordèrent un seul instant le terrain de la politique royaliste et religieuse, ils durent aussitôt s'apercevoir qu'ils n'étaient point faits pour s'entendre sur un tel terrain. Augustin-Louis Cauchy était royaliste intransigeant et catholique à l'extrême, du reste grand ami de la Congrégation et des jésuites; Niels-Henrik Abel avait les idées qui convenaient au fils du pasteur luthérien de Findö et au plus glorieux des élèves de l'école cathédrale de Christiania, et il admettait avec une naïve crédulité tous les récits des feuilles publiques parisiennes au sujet de Charles X et surtout au sujet des jésuites : « Ceux-ci, diable de canaille, veulent tout diriger », écrivait-il en une de ses lettres aux siens, puis il racontait sérieusement comment un jeune jésuite, ayant réussi à sortir de son Ordre, « avait dénoncé beaucoup de ses anciens confrères et voulait en dénoncer plus de trois cents encore : ces hommes, les plus détestables de la terre, avaient voulu l'égorger, mais il avait su se dérober. » (C.-A. Bjerknes, *Niels-Henrik Abel*, traduction française, Paris, t. 1, 1885, p. 271). — Nous croyons cependant que la conversation d'Abel et de Cauchy ne descendit point des sereines hauteurs des Mathématiques pures, et nous préférons notre première explication de l'étrange adjectif échappé à la plume d'Abel au sujet de Cauchy.

Cette pointe d'humeur n'empêcha point Abel de rendre à Cauchy l'hommage d'une souveraine admiration. Dans la lettre précitée qu'il adresse à son cher maître Holmboe (*Œuvres d'Abel*, Christiania, t. 2, 1881, p. 259), véritable causerie tantôt alerte et gaie, tantôt mélancolique et inquiète, il écrit : « Il est celui qui sait comment les mathématiques doivent être traitées. Ce qu'il fait est excellent, mais très brouillé (Abel avait expérimenté que les singuliers procédés de calcul et de notations de l'analyste français déroutent quelques moments le lecteur qui aborde ses écrits),

d'abord, je n'y compris presque rien : maintenant, j'y vois plus clair. Il fait publier une série de Mémoires, sous le titre d'*Exercices mathématiques :* je les achète, et les lis assidûment. » — D'une parfaite loyauté envers tous et d'une excessive reconnaissance pour tout service rendu, Abel aimera à se déclarer redevable de tout son savoir aux écrits de Cauchy, et il ne cessera d'entourer d'une égale gratitude le nom de Cauchy et le nom de Legendre, « le gentil vieux géomètre, de la rue Saint-Guillaume, n° 9 ».

Il est à propos de signaler aux lecteurs de l'*Intermédiaire,* au sujet des rapports entre Abel et Cauchy, le petit Mémoire de Paul MANSION, *Sur une légende relative à Abel,* dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* t. 32, 1re Partie, 1908, p. 182-188, ou en supplément de 6 pages au journal *Mathesis,* Gand, 1909, numéro de février. Le regretté professeur de l'Université de Gand précise l'histoire du « Théorème d'Abel », puis examine : 1° pourquoi l'Académie des Sciences ayant chargé Cauchy et Legendre de faire un rapport sur le *Mémoire* présenté par Abel le 30 octobre 1826, ces deux savants ne s'acquittèrent pas de cette tâche ; — 2° pourquoi Abel, prié par l'Institut de présenter une seconde copie de son manuscrit jugé illisible, paraît s'être lui-même désintéressé de son Mémoire, déparé d'ailleurs par de fréquentes obscurités et par de sérieuses incorrections : il se proposait, semble-t-il, de le refaire en entier dans la suite, avec une clarté et une rigueur complètes et sous une forme irréprochable ; — 3° comment le manuscrit original de 1826, confié en 1832 par l'Académie à Libri, pour être publié dans les *Mémoires présentés par divers savants,* disparut d'entre les mains de Libri : ce trop fameux académicien en surveilla en 1841 l'impression dans ces *Mémoires,* t. 7, sans doute, d'après quelque copie qu'il en avait fait faire à l'avance, et l'on peut conjecturer, sans faire tort à sa triste mémoire, qu'il se sera approprié pour le vendre ensuite le précieux manuscrit d'Abel : « Peut-être, en cherchant bien, le retrouverait-on dans quelque bibliothèque anglaise, enrichies de ses larcins : avis aux chercheurs d'autographes et aux admirateurs d'Abel ».

Belga.

L'INTERMÉDIAIRE
DES
MATHÉMATICIENS

FONDÉ EN 1894 PAR C.-A. LAISANT ET ÉMILE LEMOINE

DIRECTEUR-FONDATEUR

C.-A. LAISANT

Docteur ès Sciences
Ancien Examinateur à l'École Polytechnique

DIRECTEURS-RÉDACTEURS

Ed. MAILLET
Docteur ès Sciences
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées
Examinateur à l'École Polytechnique

A. MALUSKI
Agrégé de Mathématiques
Ancien Élève de l'École Normale supérieure
Proviseur du Lycée de Sceaux

A. BOULANGER
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers
Répétiteur et Examinateur d'admission à l'École Polytechnique

---

Publication honorée d'une souscription du Ministère de l'Instruction publique

---

TOME XXVII — 1920

N^{os} 5 et 6. — MAI-JUIN 1920

PARIS

GAUTHIER-VILLARS et C^{ie}, EDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1920

VOIR LES AVIS DIVERS ET LA CORRESPONDANCE à la page 2 de la Couverture

SOMMAIRE DES N° 5 ET 6.

S'adresser, pour la rédaction, à M. *Ed. Maillet*, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, 11, rue de Fontenay, Bourg-la-Reine, ou à M. *A. Maluski*, proviseur du Lycée Lakanal, à Sceaux, ou à M. *A. Boulanger*, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, rue Gay-Lussac, 30, Paris; pour les abonnements et les tirages à part, à MM. *Gauthier-Villars et Cie*, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Rédacteur de service : M. A. MALUSKI, proviseur du lycée Lakanal à Sceaux (Seine).

QUESTIONS récentes de MM. A. Cunningham, H. Brocard, R. Despujols, Goormaghtigh, J. Pacé, H. Sebban, Velasco de Pandou

RÉPONSES récemment reçues de MM. H. Brocard, **3288**; Cashmore, **5009**, **5027**; Cunningham, **5036**, **5041**; Goormaghtigh, **4810**, **4972**; Haarbleicher, **5008**; Hendlé, **4910**, **5002**, **5005**, **5006**, **5009**, **5021**, **5024**; Marchay, **5011**, Pacé, **4991**; Poulet, **4905**; Ser, **4890**.

Nous prions nos Correspondants de rappeler leur adresse dans chacun de leurs envois; de *n'écrire que sur le recto de la feuille*. Les formules doivent être écrites et les figures *faites avec le plus grand soin*, de façon qu'elles ne prêtent à aucune ambiguïté pour l'impression, particulièrement en ce qui concerne les indices, les signes, etc. En général, rien de ce qui est à imprimer ne doit être oublié, la ponctuation par exemple. La dactylographie est recommandée. Enfin, nous prions nos correspondants d'une manière tout à fait instante, de s'attacher, dans la mesure du possible, à ne pas omettre, lorsqu'ils citent un périodique, l'année de la publication, renseignement aussi important que celui de sa tomaison.

ERRATUM. — Question **5031**, page 35, lignes 6 et 7 : Au lieu de « le lieu des sommets des paraboles qui touchent une droite donnée en un point donné est une quintique... », il faut lire « le lieu des sommets des paraboles qui passent par un point donné et touchent une droite donnée en un point donné, est une quintique... ».

Pour une solution analytique de ce cas, on peut consulter AUBERT et PAPELIER, *Exercices de Géométrie analytique*, t. II, p. 284.

Nos correspondants et nos lecteurs partageront la douloureuse émotion que nous avons ressentie en apprenant la mort de M. C.-A. Laisant qui fut, avec le regretté Lemoine, le fondateur de cette Revue.

Nous nous proposons de consacrer un article du prochain numéro au souvenir de ce savant éminent et de cet homme de bien.

La Rédaction.

QUESTIONS.

5044. **[I19c]** Sait-on résoudre complètement en nombres entiers a l'équation indéterminée

$$a^3 - 3ab^2 + b^3 = 1.$$

La question revient au même de chercher les unités de la forme $a - b\eta$ du corps algébrique $k(\eta)$ engendré par $\eta = 2\cos\frac{2\pi}{9}$, racine de l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$.

D'après un théorème de A. Thue, l'équation proposée n'a qu'un nombre fini de solutions. Je n'ai trouvé que la solution $a = 1$, $b = 3$. T. Nagel (Christiania).

5045. **[I19c]** L'équation indéterminée

$$x^3 + 1 = y^2$$

n'admet d'autres solutions entières que $x = 2$, $y = \pm 3$, pour $x > 0$. A l'aide d'un théorème de C. Störmer, on peut démontrer que l'équation plus générale

$$x^n + 1 = y^2,$$

où n est un nombre premier impair, est impossible pour $x > 0$, si le nombre y n'est pas divisible par n.

A-t-on étudié le cas où y est divisible par n^2 ?

D'après Thue, l'équation considérée n'a qu'un nombre limité de solutions, s'il y en a.

T. Nagel (Christiania).

5046. [**H11**] Soit $F(x)$ une fonction admettant la période ω. Parmi les fonctions définies par l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = F\left[\frac{\omega}{\log a}\log y\right], \tag{1}$$

il en est une $y = f(x)$, telle que

$$f(ax+b) = af(x). \tag{2}$$

Peut-on indiquer d'autres fonctions satisfaisant à la relation fonctionnelle (2)?

En dehors de $f(x) = x$, existe-t-il d'autres fonctions telles que

$$f(ax+b) = af(x) + b\ ?$$

Peut-on trouver une fonction $f(x)$ telle que

$$f(ax^2+bx+c) = f(x)\ ?$$

Dans un cas particulier on a, $F(x)$ étant la fonction définie plus haut :

$$F\left[\frac{\omega}{\log 2}\log\log x^2\right] = F\left[\frac{\omega}{\log 2}\log\log x\right].$$

R. Ratat.

5047. [**A1**] 1° Décomposer l'expression x^x, où x est un nombre entier, en une somme de nombres entiers réciproques.

Par exemple :

$$\begin{aligned}5^5 = 1 + 5 + 15 + 35 + 70 + 121 + 185 \\ + 255 + 320 + 365 + 381 + 365 + 320 \\ + 255 + 185 + 121 + 70 + 35 + 15 + 5 + 1 = 3125.\end{aligned}$$

Quelle est la solution générale?

2° Décomposer l'expression z^x où z et x sont des nombres entiers en une somme de nombres entiers réciproques dans les cas où z est différent de l'entier x.

F. Villareal (Lima, Pérou).

5048. **[M²3d]** Soit un polyèdre convexe C. On projette un point P de l'espace sur ses faces, et, si l'on joint par trois les projections sur faces contiguës, on forme les faces, au moins triangulaires, d'un nouveau polyèdre D, qui sera dit « podaire de C relatif au point P ». Cela posé :

1° Le lieu des points P pour lesquels le volume V du polyèdre D reste constant, est une surface du troisième ordre (S). Si V varie, (S) varie en gardant mêmes directions asymptotiques et même développable circonscrite suivant ces directions.

Même sorte de lieux, avec une simple partie de surface du polyèdre C, le volume v se limitant par un polyèdre podaire partiel d, et par la surface de l'angle polyèdre dont les projetantes extrêmes sont les arêtes.

2° Le lieu est une quadrique (Σ) dans le premier cas, si, deux à deux, les faces de C se correspondent et sont parallèles (notamment pour des solides centrés et des solides de cristallographie). Quand V varie, les (Σ) restent concentriques et homothétiques. H. DE MONTILLE.

5049. **[V]** Où en est la réédition des œuvres du mathématicien portugais Pedro Nunes, dont il est parlé dans la question **915** (t. **23**, 1916, p. 103)? Où se publie l'Ouvrage? Dans quelles conditions? Certains volumes ont-il déjà paru?

H. BOSMANS.

5050. **[V7]** A la fin des explications préliminaires de la *Table des nombres premiers et de la décomposition des nombres de* 1 *à* 100000 *de l'Inghirami* récemment rééditée (Paris, Gauthier-Villars, 1919), le regretté Dr Prompt parle avec un véritable enthousiasme des travaux arithmétiques d'Arnauld Daniel, qu'il déclare d'une importance comparable à ceux de Fermat, Lambert et Legendre. N'ayant pas réussi à me procurer des renseignements sur ce savant, je prie quelque correspondant de bien vouloir me dire où et quand est né ce savant, dont les meilleurs ouvrages de consultations

ignorèrent l'existence, et quelles sont ses principales publications. GINO LORIA.

5051. [**I17a**] Le R. P. Pépin, S. J., dans son bel article *Sur quelques équations de la forme* $x^2+cy^2=z^3$ (*A. S. B.*, t. 27, 2^e Partie, 1903, p. 21) s'exprime ainsi :

« Je dois au même savant (M. H. Brocard) de nombreux résultats de calculs relatifs au problème de trouver les cubes que l'on peut obtenir en ajoutant un carré à un nombre donné $8l+7$. Ces résultats ont été l'objet d'une communication faite à la Société des Lettres, Sciences et Arts de Bar-le-Duc (6 mars 1895). On y trouve des valeurs de $c=8l+7$ pour lesquelles M. Brocard a trouvé 5, 6 et même 7 cubes formés en ajoutant c à des carrés.

» Mais, dans tous ces exemples, il n'y a jamais plus d'un cube impair pour la même valeur de c. »

Je relève, dans mes tableaux de solutions de $\pm y^2+x^3 \doteq a$ avec $|a| \leqq 2000$, *trois* valeurs de $c=8l+7$, pour lesquelles, dans $c=x^3-y^2$, le nombre x aura *deux* valeurs impaires, en remarquant que l est multiple de 5 :

$$207 = 8.25.+7 = 31^3-172^2 = 331^3-6022,$$
$$847 = 8.105+7 = 11^3-22^2 = 657547^3-533200074^2,$$
$$1727 = 8.215+7 = 27^3-134^2 = 2303^3-110520^2.$$

Étudier cette question; voir si l'on peut trouver pour 207, 847, 1727 encore d'autres valeurs de x impaires, et chercher si d'autres nombres c répondent à ces desiderata.

A. GÉRARDIN.

5052. [**I13f**] Ayant un nombre premier $p=a^2+b^2$, quels sont les nombres p pour lesquels $u_z^2-pv_z^2=-1$ étant la plus petite solution de $x^2-py^2=-1$, on aura

$$z=a-b \quad \text{avec} \quad a>b \quad \text{et} \quad b\neq 1,$$

z étant le rang de la réduite.

Exemple :

$$p = 9817, \quad a = 99, \quad b = 4, \quad z = 95.$$

Cette solution de $x^2 - 9817y^2 = -1$, où y est un très grand nombre, a été trouvée par M. Artemas Martin (*Analyst*, 1877, p. 54). A. Gérardin.

5053. [$K^1 9b$] On considère tous les polygones réguliers de N côtés inscriptibles dans un cercle de rayon R. Soient c_1 le côté du polygone convexe; c_2, c_3, ..., c_n les côtés des polygones étoilés. Le produit $c_1\, c_2 \ldots c_n$ a pour expression :

1° $R^{\frac{N-1}{2}}\sqrt{N}$, quand N est premier;

2° $R^{\frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)}\sqrt{a}$, si $N = a^p$, avec a premier;

3° $R^{\frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k}\right)}$ lorsque les facteurs premiers de N sont a, b, ..., k.

Ces résultats sont-ils connus ? J. Pacé.

5054. [$M^1 3k$] Deux droites issues de l'origine rencontrent la parabole

$$x^2 = ay$$

aux points M et N, et la campyle d'Eudoxe

$$x^4 = a^2(x^2 + y^2)$$

aux points M′ et N′. Démontrer que, quelles que soient les deux droites, les arcs MN et M′N′ sont égaux.

F. Balitrand.

5055. [I2b] Posons

$$N = (\alpha\beta x^4)^{\alpha\beta} - (\alpha^{2\alpha\beta} + \beta^{2\alpha\beta})(xy)^{2\alpha\beta} + (\alpha\beta y^4)^{\alpha\beta},$$
$$N' = (\alpha\beta x^4)^{\alpha\beta} + (\alpha^{2\alpha\beta} + \beta^{2\alpha\beta})(xy)^{2\alpha\beta} + (\alpha\beta y^4)^{\alpha\beta},$$

où α, β sont deux nombres premiers, impairs et inégaux, et x, y deux nombres entiers, sans facteur commun.

Démontrer que l'une des fonctions N ou N′ a en général 10 facteurs algébriques, et définir la propriété corrélative de l'autre fonction N′ ou N.

Distinguer les cas de $\alpha\beta = 4i+1$ et $\alpha\beta = 4i+3$.

Exemple : Factoriser en 10 facteurs algébriques l'une des fonctions

$$N \text{ ou } N' = (15x^4)^{15} \mp (9^{15} + 25^{15})(xy)^{30} + (15y^4)^{15}.$$

Combien trouve-t-on de facteurs algébriques lorsque $\alpha = 2\alpha'$ ou $4\alpha'$ avec α', β premiers, impairs et inégaux ?

ALLAN CUNNINGHAM.

5056. [**D1b**] Dans son Mémoire : *Sur la représentation d'une fonction par une série trigonométrique*, Riemann rapporte (*Œuvres*, traduction Langel, Paris, 1898, p. 232) que, lorsque Fourier énonça à l'Académie des Sciences la proposition d'après laquelle toute fonction peut s'exprimer par une série trigonométrique, Lagrange la contesta de la manière la plus formelle ; Riemann ajoute, d'après Dirichlet, que, sur ce débat, il doit exister une pièce écrite dans les archives de l'Académie de Paris.

Cette pièce existe-t-elle réellement ? Le cas échéant, je crois qu'il serait extrêmement intéressant de la livrer à l'impression, car il s'agit d'un point de doctrine d'une importance hors ligne.

GINO LORIA.

5057. [**V**] L'*Intermédiaire des Mathématiciens* ne ferait-il point chose utile et d'ailleurs conforme à son titre et à l'esprit qui le dirige en donnant, de temps en temps, par exemple une ou deux fois par an, une liste succincte des *mathématiciens récemment décédés*, avec l'indication du lieu et date de chaque décès ? On pourrait y joindre la date et le lieu de naissance, mais omettre le *curriculum vitæ* (sauf exceptionnellement une à deux lignes indiquant les fonctions dernières). Pour se borner, on n'annoncerait que les décès de mathématiciens connus par quelque publication. La liste relative aux décès survenus durant les années de guerre 1914-1918 serait de quelque intérêt.

Belga.

RÉPONSES.

4911 (**1919**, 37) (H. SEBBAN). — *Sur la formule*

$$S = 1^k C_n^1 + 2^k C_n^2 + \ldots + n^k C_n^n$$

(**1919**, 127). — Je ne sais si cette formule est connue, mais je vais sommer par le moyen suivant qui en donne plusieurs : d'abord les sommes

$$S(b, k) = 1^k b\, C_n^1 + 2^k b^2 C_n^2 + \ldots + n^k b^n C_n^n = \sum_{j=1}^{j=} b^j j^k C_n^j$$

(b entier ou non) : puis les mêmes sommes de deux en deux termes, parce que les sommes $\mathcal{S}(b, k)$ des termes de $S(b, k)$ alternés de signe sont calculables. Et pour $b = 1$, les sommes de deux en deux valent $\frac{1}{2}$ S (1, k), car on verra que $\mathcal{S}(1, k) = 0$.

La meilleure méthode est de considérer l'opération

$$A(u_1) = \frac{\partial}{\partial x}(x u_1)$$

faite sur $u_1 = n(1 + x)^{n-1}$: je pose $u_2 = A(u_1)$, et *l'itération* de A, k fois de suite, mène à

$$u_k = A(u_{k-1}) = A^{(k)}(u),$$

et $x = 1$ donne S.

Posant donc $v = (1 + x)^n$, avec $u_1 = v'$ et $S_k = S(1, k)$, j'obtiens :

$$u_1 = v' = n(1 + x)^{n-1};$$

et $x = \pm 1$ donne $S_1 = y'_0 = n.2^{n-1}$ et $\mathcal{S}_1(1, k) = 0$:

$$u_2 = n(nx + 1)(1 + x)^{n-2}; \quad S_2 = n(n+1).2^{n-2}; \quad \mathcal{S}_2(1, k) = 0;$$

$$u_3 = n[n^2 x^2 + (3n - 1)x + 1](1 + x)^{n-3};$$

$$S_3 = n^2(n + 3).2^{n-3}; \quad \mathcal{S}_3 = 0;$$

$$u_4 = n[n^3 x^3 + (6n^2 - 4n + 1)x^2 + (7n - 4)x + 1](1 + x)^{n-4};$$

tous les $\mathcal{S}$ restent nuls et $S_4 = n(n+1)(n^2 + 5n - 2).2^{n-4}$.

On voit donc, et l'on vérifie de p à $p+1$, la forme de u_p:

$$u_p = n(n^{p-1}.x^{p-1} + P_{p-2}x^{p-2} + \ldots + P_2x^2 + P_1x + 1)(1+x)^{n-p}$$

et pour ces polynomes $P_q(n)$ entiers en n, de degré en n égal à leur indice q, et à coefficients entiers, on trouve :

$$P_{p-2} = (-1)^p[1 - C_p^1 n + C_p^2 n^2 + \ldots + (-1)^p C_p^2 n^{p-2}].$$

Pour les autres, appelant $R_q(n)$ les coefficients de u_{p-1}, on a, par récurrence,

(1)
$$P_{p-3}(n) = (n-2)R_{p-4}(n) + (p-2)R_{p-3}(n);$$
$$P_{p-t} = (p-t+1)R_{p-t} + (n-t+1)R_{p-t-1};$$
$$P_2(n) = (n-p+3)R_1(n) + 3R_2(n);$$
$$P_1(n) = 2R_1(n) + n - p + 2 = (2^{p-1}-1)n - w_p$$

[les w_p ont pour différences premières Δw les $(2^{p-1}-1)$].

Ainsi
$$S = S(1, k) = n.2^{n-k}[n^{k-1} + C_k^3 n^{k-2} + f_{k-3}(n)],$$

où $f(n)$, qui est de degré $k-3$ en n, n'a pas de *terme constant si k est impair;* je l'ai vérifié pour S_3, S_5, S_7, etc., par les formules (1); par exemple :

$$S_5 = n^2.2^{n-5}(n^3 + 10n^2 + 15n - 10).$$

Cette sommation, si $k > n$, cesse donc de simplifier toujours.

Mais si $k > n$, $1 + e^x = 2e^{\frac{x}{2}}.\mathrm{ch}\frac{x}{2}$ donnera encore le symbole

$$(2) \qquad S_k = 2^n\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(e^{\frac{nx}{2}}.\mathrm{ch}^n\frac{x}{2}\right)\right]_{x=0}$$

coefficient d'un développement de Mac Laurin $\sum S_k \cdot \frac{x^k}{k!}$; de même avec Sh pour les sommes alternées, en partant de

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}(1 \pm e^x)^n \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^k}{\partial x^k}(y).$$

Ce symbole tel quel, n'aide guère plus que la formule de Leibnitz pour la dérivée $y^{(p)}$ d'ordre p de ce produit de n facteurs. Mais, avec les notations adoptées, on retrouve

$$y^{(p)} = ne^x[n^{p-1}e^{(p-1)x} + P_{p-2}e^{(p-2)x} + \ldots + P_1e^x + 1](1+e^x)^{n-p}$$

(on a S_p si $x = 0$).

De même $A^{(k)}(1 \pm bx)^n$ mène à $S(b, k)$ et $\mathcal{S}(b, k)$.

La présence de 2^{n-k} dans $S(1, k)$ montre, — ce qui est intéressant pour l'arithmologie — un lien intime avec la numération *binaire* (*voir* Ed. LUCAS, *Théorie des nombres*, pour une démonstration en langage ordinaire de la formule $2^n = \sum_1^n C_n^j$ des bouliers chinois, parfois utile en analyse combinatoire).

H. DE MONTILLE.

4935 (**1919**, 73) (H. BROCARD). — *Relations entre e et π.* — Voici les nombres e^π, $e^{\frac{\pi}{2}}$ et π^e, avec 28 décimales exactes, obtenus au moyen de mes Tables à 32 décimales, pour le calcul de logarithmes.

$$e^\pi = 23,14069.26327.79269.00572.90863.679,$$
$$e^{\frac{\pi}{2}} = 4,81047.73809.65351.65547.30356.667,$$
$$\pi^e = 22,45915.77183\ 61045.47342.71522.045.$$

L. BASTIEN.

4941 (**1919**, 97) (LECAT). — *Cossali.* — Le P. Pierre Cossali (1745-1815) a réellement écrit un *Trattato soprà le figure isoperimetre*. Le savant crémonais appartient à l'ordre des Théatins et non point à l'ordre des Jésuites : au terme de son adolescence, il était entré dans l'ordre des disciples de Saint-Ignace, mais sa santé, alors précaire, l'obligea à quitter le noviciat; il entra un peu plus tard chez les Théatins. Le Mémoire susdit figure sous le n° 15 parmi les 30 numéros de la bibliographie de ce mathématicien donnée par la *Biografia italiana* de Tipaldo; mais le titre de ce Mémoire n'est accompagné d'aucun renseignement complémentaire. Nous pensons que ce Mémoire a été publié dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences, Littérature et Beaux-Arts* qui parurent à Turin de 1802 à 1816; au Tome 23 (1813-1814) figure une Table générale des Tomes précédents, qui renseignerait à ce sujet; mais cette collection manque, nous le craignons, dans les Bibliothèques de Bruxelles, où M. Lecat eût pu la consulter, et quant à la Bibliothèque universitaire de Louvain, qui la possédait peut-être, les Allemands ont tout réduit en cendres en 1914.

Riccardi, dont la *Biblioteca matematica italiana*, parue de 1870 à

1885, ne s'occupe que des mathématiciens morts avant 1813, ne pouvait mentionner Cossali, décédé en 1815; la grande *Biographie universelle* de MICHAUD (t. 9, art. *Cossali*, par Weiss) et celle de HOEFER donnent de Cossali une bibliographie très incomplète.

Belga.

4954 (**1919**, 100) (R. S. DE BEIRES). — *Courbes ayant pour orthoptique une droite.* — Pour obtenir de telles courbes, il suffit de prendre les polaires réciproques, par rapport à un cercle de centre O, des courbes dont les cordes, vues de O sous un angle droit, passent par un point fixe. Nous avons considéré ces dernières courbes dans une Note des *Nouvelles Annales*, avril 1914; parmi elles, on peut citer : le trifolium oblique, le trifolium de Cramer, les cubiques nodales à tangentes nodales rectangulaires.

R. GOORMAGHTIGH (Mons).

Des orthoptiques de classes supérieures à l'unité peuvent vraisemblablement se décomposer et renfermer une ou plusieurs droites, mais les courbes de deuxième et de troisième classe sont les seules dont l'orthoptique puisse être constituée par une droite unique.

Soit, en effet, q la classe d'une courbe, t le nombre de ses directions paraboliques, parmi lesquelles τ couples rectangulaires ($t \geqq 2\tau$).

La classe de l'orthoptique est alors

$$n = (q-1)(q-t) - \tau.$$

Si $n = 1$, on a

$$t = \frac{q(q-1)-(\tau+1)}{q-1},$$

qui doit être entier. La plus petite valeur de τ est alors $q-2$, d'où $t = q - 1 \geqq 2(q-2)$, donc $q \leqq 3$.

Les deux seules courbes répondant à la question correspondent à

$$q = 2, \quad t = 1, \quad \tau = 0,$$

parabole;

$$q = 3, \quad t = 2, \quad \tau = 1,$$

quartique tricuspidale, bitangente à la droite de l'infini dans deux directions rectangulaires.

Propositions réciproques : « Les coniques sont les seules courbes dont chaque point admette un point de Frégier ». Le nœud d'une cubique jouit de la même propriété quand les tangentes y sont rectangulaires.

P. HENDLÉ.

Les courbes de ce type de classe au-dessus de 2, sont, pour M. M. d'Ocagne, les *bissectantes*, par rapport à cette droite, de toute

courbe *non de direction* (voir *Nouvelles Annales*, septembre 1919, p. 329). J'ajouterai qu'elles sont, analytiquement, bien plus particulières que la parabole, qu'une simple perspective change en conique générale.

H. DE MONTILLÉ.

Autre réponse de M. H. BROCARD, qui signale l'étude de M. D'OCAGNE *Sur les courbes à axe orthoptique et les courbes de direction*, parue dans les *N. A.*, 1919, p. 329-338.

4967 (**1919**, 129) (A. GÉRARDIN). — *Théorème de factorisation.* — M. L. Aubry m'a fait remarquer, par l'entremise de M. H. Brocard, que le théorème est en défaut pour

$$N = 1, \quad x = 3,$$

car

$$p = 8K + 1 = 113, \quad 2^7 \equiv 15, \quad 2^{14} \equiv 15^2 \equiv -1 \quad (\text{mod } 113).$$

M. *Zéro* m'indique, d'autre part, que le théorème est inexact pour

$$N = 1, \quad x = 3,$$

car

$$2^{44} \equiv -1 \quad (\text{mod } 353).$$

D'ailleurs $p = a$.

M. Poulet a trouvé ce théorème en défaut pour $a = 14, 35, 44, 137$.

En remontant à l'origine de la question, je viens de retrouver ce théorème dans les papiers d'Ed. Lucas, antérieurs à 1885, et je vois d'après des résultats ultérieurs d'Ed. Lucas lui-même que

« n et $8n+1$, $n = 6q+5$;

on décompose d'abord $8n+1 = A^2 + 16B^2$ en deux carrés dont l'un d'eux est nécessairement multiple de 4.

THÉORÈME IV. — *Le nombre* $2^n - 1$ *est divisible par* $8n+1$ *si* B *est double d'impair* (résidu octique) ».

La question est donc entièrement élucidée.

[*Cf.* A.-F., Nancy, 1886; *Sphinx Œdipe*, 1909, p. 93-94.]

A. GÉRARDIN.

4968 (**1919**, 129) (A. GÉRARDIN). — *Nombres s'écrivant de trois façons sous forme d'une somme de trois bicarrés.* — Le nombre 811 538, plus petit que ceux indiqués par M. Gérardin, s'écrit aussi de trois manières sous forme d'une somme de trois bicarrés

$$27^4 + 23^4 + 4^4 = 29^4 + 17^4 + 12^4 = 28^4 + 21^4 + 7^4.$$

Voici une identité :

$$\begin{aligned}&(3a-8b)^4+(8a-5b)^4+(5a+3b)^4\\=&(3b-8a)^4+(8b-5a)^4+(5b+3a)^4\\=&(7a)^4+(7b)^4+[7(a-b)]^4.\end{aligned}$$

R. Goormaghtigh.

4972 (**1919**, 131) (A. Gérardin). — *Équations*

$$x^8-y^8=a^4+b^4-(c^4+d^4).$$

a. Prenons l'identité de D. Hilbert :

$$\begin{aligned}&\overline{[2(bc-ad)]}^4+\overline{[a(d+c)-b(c-3d)]}^4\\&\qquad+\overline{[a(d-c)-b(c+3d)]}^4\\=&\overline{[2(ad+bc)]}^4+\overline{[a(d-c)+b(c+3d)]}^4\\&\qquad+\overline{[a(c+d)+b(c-3d)]}_1.\end{aligned}$$

Les deux premiers termes de chaque membre devenant des carrés, le problème est résolu. Ce résultat est obtenu en prenant

$$bc-ad=2Q^2,\qquad ad+bc=2R^2.$$

On résoudra ce système en prenant par exemple

$$\begin{aligned}a&=q_1(r_1+r_2)\pm q_2(r_2-r_1),\\b&=q_1^2+q_2^2,\\c&=r_1^2+r_2^2,\\d&=q_1(r_1-r_2)\pm q_2(r_1+r_2),\end{aligned}$$

les quantités q, ..., r étant arbitraires.

On aurait pu obtenir d'autres solutions en carrifiant d'autres termes de l'identité de Hilbert.

Ainsi, on trouve aisément les valeurs

$$\begin{aligned}a&=q_1^2+q_2^2,\\b&=q_1(r_2-r_1)\mp q_2(r_1+r_2),\\4d&=q_1(r_1+r_2)\pm q_2(r_2-r_1)+r_1^2+r_2^2,\\4c&=q_1(r_1+r_2)\pm q_2(r_2-r_1)-3r_1^2-3r_2^2.\end{aligned}$$

b. On pourrait tout aussi bien obtenir des identités pour x^8+y^8 en carrifiant deux termes du premier membre. R. Despujols.

4975 (**1919**, 132) (M. LECAT). — *Un déterminant de permanents. Relations de Cayley généralisées.* — Voici quelques indications qui, sans résoudre la question d'une manière définitive, permettront peut-être à quelque chercheur plus heureux que nous, de donner la solution complète.

I. Le terme

$$\prod_{\nu=1}^{n} \lambda_{\varepsilon_\nu, i_\nu}^{(\nu)}$$

de l'élément général de la matrice de classe n,

$$(1) \qquad \left\| \overset{+}{\left| \lambda_{j_1, i_{j_1}}^{(j_1)} \right|}_{(j=1,\ldots,n)} \right\|_{(i=1,\ldots,p)},$$

les λ constituant n matrices rectangulaires, chacune de pn éléments, fournit, dans le développement du déterminant, une expression que des inversions de facteurs permettent d'écrire

$$(2) \qquad \prod_{\alpha=1}^{p} \lambda_{\varepsilon_1^{(\alpha)}, \alpha}^{(1)} \prod_{\sigma=2}^{n} \sum_{i_\sigma} (\pm_{i_\sigma}) \prod_{\alpha=1}^{p} \lambda_{\varepsilon_\sigma^{(\alpha)}, i_\sigma^{(\alpha)}}^{(\sigma)}.$$

Chacun des $n-1$ facteurs auxquels s'applique le signe $\prod_\sigma$ représente un déterminant

$$\left| \lambda_{j\omega_\sigma, i_\sigma}^{(\sigma)} \right|_{(\omega_\sigma, i_\sigma = 1, \ldots, p)},$$

à deux dimensions et d'ordre p, qui, pour $p > n$, est nul comme ayant au moins deux files parallèles identiques (puisque les j ne prennent que n valeurs); d'où l'on conclut que pour $p > n$, le déterminant est uniformément nul. C'est la généralisation indiquée au I dans l'énoncé de la question.

Remarquons que si, dans (2), des symboles $(\pm_{i_\sigma})$ étaient remplacés par l'unité, mais non pour toutes les valeurs de σ, l'expression deviendrait un produit de permanents par au moins un déterminant nul et elle resterait par conséquent nulle. On en conclut (généralisation III) que la propriété a encore lieu pour les pénédéterminants. [Cf. *Ann. Soc. scient. Brux.*, t. 39 (1919-1920), 2^e Partie, p. 10.] S'il y a ν indices signants, on voit que pour

$$\frac{n - \delta_{1,(-1)^{n-1}}}{2}$$

nombres ν les pénédéterminants sont chacun uniformément nuls, les $\binom{n}{\nu}$ valeurs étant nulles dans chacun d'eux.

Quant au permanent (unique) de la matrice (¹), il n'est pas nul et son expression ne paraît pas simple.

Si l'on supprime l'indice supérieur des λ, la matrice, qui est alors celle considérée par Cayley (*loc. cit*), devient actinomorphe, ce qui est une seconde raison suffisante pour l'uniformité du déterminant (¹).

Si l'ordre p n'est pas supérieur à la classe n, le déterminant et les pénédéterminants ne sont pas identiquement nuls. Si $p < n$ (cas dont Cayley ne parle pas), le calcul du déterminant est difficile.

II. Si $p = n$, la matrice étudiée est formée à l'aide de n matrices carrées de n^2 éléments. Pour $p = n = 2$, on constate que

$$\left| \overset{+}{\left|} \lambda^{(j_2)}_{j_1, i_{j_2}} \overset{+}{\right|}_{(j=1,2)} \right|_{(i=1,2)} = - \left| \lambda^{(1)}_{r_1, r_2} \right|_2 . \left| \lambda^{(2)}_{s_1, s_2} \right|_2,$$

relation qui, par suppression de l'indice supérieur, donne celle écrite par Cayley. Est-elle susceptible d'extension ? A première vue, il serait à présumer que le déterminant

$$(3) \qquad \left| \overset{+}{\left|} \lambda^{(j_2)}_{j_1, i_{j_2}} \overset{+}{\right|}_{(j=1,\ldots,n)} \right|_{(i=1,\ldots,n)}$$

dût être égal respectivement à

$$(4) \qquad c(n) \prod_{1}^{n}{}_{\varepsilon} \left| \lambda^{(\varepsilon)}_{r_1, r_2} \right|_n,$$

$$(5) \qquad \begin{cases} c(n) \overset{+}{\left|} \lambda^{(1)}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \overset{+}{\right|}_n . \prod_{2}^{n}{}_{\sigma} \left| \lambda^{(\sigma)}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \right|_n \\ \text{ou peut-être } zéro, \end{cases}$$

(¹) De ce que Cayley prend le soin (superflu) d'indiquer que l'indice ordonné (*unpermuted*) est au premier rang, on peut conclure, semble-t-il, qu'il n'a pas constaté la monogénéité du déterminant (qui a lieu du reste quel que soit p par rapport à n). Il ne signale pas non plus l'actinomorphie de la matrice, notion qu'il avait cependant posée dans un Mémoire [*Cambr. Dublin M. J.*, t. 7 (1852), p. 45; *Papers*, t. 2, Cambridge, 1889, p. 20] où il constata (le premier, ce que l'on a méconnu jusqu'ici), pour une forme de degré pair, l'invariance de ce qu'il appelle son « *symetrical* commutant ». Ce déterminant étant de classe paire, l'uniformité ne pouvait être en question dans ce cas. Mais il est intéressant de constater que dans aucun de ses travaux sur les déterminants de classe supérieure, Cayley n'a posé la notion de mérogénéité et n'y a fait la moindre allusion, comme du reste, aucun de ses successeurs.

suivant que la classe n est paire ou impaire, l'indice non signant étant (dans le second cas) au premier rang. Or, ces relations n'ont pas lieu, même si l'on supprime l'indice supérieur.

Le cas du déterminant ordinaire semblerait donc constituer une sorte d'exception, comme cela s'est déjà constaté dans bien d'autres circonstances que Cayley ne pouvait encore connaître.

Mais on sait (¹) que les expressions

$$(6)\quad \begin{cases} \prod_{1}^{n} \varepsilon \, \left| \lambda_{\alpha, i_\varepsilon}^{(\varepsilon)} \right|_p & (n \text{ pair}), \\ \overset{+}{\left|} h_{\alpha, i_1}^{(1)} \overset{+}{\right|}_p \cdot \prod_{2}^{n} \sigma \, \left| h_{\alpha, i_\sigma}^{(\sigma)} \right|_p & (n \text{ impair}), \end{cases}$$

qui pour $p = n$ ne diffèrent en réalité de (4) et (5) que par le facteur $c(n)$, sont égales au déterminant

$$\left| \sum_{\alpha=1}^{p} \prod_{1}^{n} \varepsilon \, \lambda_{\alpha, i_\varepsilon}^{(\varepsilon)} \right|_{(i=1, \ldots, p)},$$

l'indice non signant devant, dans le second cas, être pris au premier rang (²).

Il est connu également que l'expression (4) devient bien égale à (3) si l'on supprime de celle-ci les signes $+$, c'est-à-dire si les éléments du déterminant, au lieu d'être des permanents, sont des déterminants. En effet, on démontre aisément que le déterminant (³)

$$\left| \left| \lambda_{j_1, i_{j_2}}^{(j_2)} \right|_{(j=1, \ldots, n)} \right|_{(i=1, \ldots, n)}$$

(¹) D'après J.-E. Campbell, *Proc. L. M. Soc.*, t. 24 (1892-1893), p. 67. *Cf.* M. Lecat, *Abrégé de la théorie des déterminants à n dimensions*, Gand et Paris, 1911, p. 69-70.

(²) Constatons que les structures de (7) pour $p = n$ et de (3) diffèrent en ce que dans (7) tout élément est une somme de n produits distincts de n facteurs chacun, tandis que dans (3) tout élément est une somme de $n!$ produits, distincts ou non, chacun de n facteurs. Si l'on supprime l'indice supérieur des λ, les produits $\prod$ dans les expressions (6) sont remplacés par des puissances et le déterminant (7) devient actinomorphe.

(³) D'après R.-F. Scott, *Proc. L. M. Soc.*, t. 9 (1879-1880), p. 17 et suiv., surtout le paragraphe 14. *Cf.* M. Lecat, *Abrégé*, p. 23, 72.

est égal à

$$n!\left[\frac{3}{2}\delta_{2,n}-\delta_{1,(-1)^n}\right]\cdot\prod_{1}^{n}\varepsilon\,|\lambda^{(\varepsilon)}_{r_1,r_2}|_n,$$

expression nulle pour n impaire. Pour $n = 2$, le coefficient est 1; pour n paire et au moins égale à 4, c'est $-n!$ Ici aussi il y a, au moins en ce qui concerne le coefficient, une sorte d'exception quand la classe est 2.

Si l'ordre du déterminant composé diffère de la classe et lui est supérieur, ce qui ramène au I, on démontre, comme on l'a fait pour (1), qu'il est identiquement nul. La seule différence est que la nouvelle expression (2) est précédés d'un signe. Et le théorème a encore lieu, évidemment, pour les pénédéterminants.

De plus, comme il est présumé dans l'énoncé de la question (généralisation II), on peut envisager n matrices allongées, non plus à 2, mais à m dimensions et à pn^{m-1} éléments; il est visible que le même genre de démonstration est applicable.

Enfin, dernière extension (généralisation IV), on peut superposer plus de deux systèmes de barres. M. LECAT (Bruxelles).

4976 (**1919**, 133) (SERTORIO GIUSEPPE). — *Sur deux ponctuelles projectives.* — Les deux questions posées ne sont pas résolubles par la règle et le compas, car elles conduisent à chercher l'intersection d'une droite et d'une conchoïde de Nicomède, courbe du quatrième ordre. P. HENDLÉ.

4978 (**1919**, 161) (H. BROCARD). — *Placer les sommets d'un tétraèdre régulier sur les arêtes d'un angle tétraèdre quelconque.* — Si l'on peut placer les quatre sommets d'un tétraèdre régulier donné sur les quatre arêtes d'un angle tétraèdre également donné, on pourra y placer homothétiquement n'importe quel tétraèdre régulier.

Inversant alors la question, il faut chercher à faire passer par quatre points donnés les quatre arêtes d'un angle tétraèdre donné.

Le problème est impossible, puisque, pour un angle trièdre donné, dont les arêtes passent par trois points donnés, il n'y a qu'un nombre fini de positions. La quatrième arête de l'angle tétraèdre ne peut donc pas passer par un quatrième point arbitraire. P. HENDLÉ.

Réponse de M. R. GOORMAGHTIGH.

4979 (**1919**, 161) (H. Brocard). — *Lieux géométriques décomposables en deux courbes distinctes.* — Comme classes générales de lieux géométriques décomposables, il faut citer un grand nombre de lieux déduits des courbes de direction. Si $f(x, y) = 0$ est l'équation cartésienne d'une telle courbe, l'expression

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

est rationnelle, et il en résulte que, dans les recherches analytiques où intervient cette expression, on peut séparer les développements relatifs à chacun des signes que peut prendre le radical.

Par exemple, on trouvera une courbe décomposable en cherchant, pour une courbe de direction, le lieu de l'intersection de la normale en un point M avec un cercle de rayon constant ayant M pour centre (courbes parallèles).

On déduit de là que la recherche des conchoïdes des podaires des courbes de direction conduira également à des lieux décomposables. Au sujet des courbes à conchoïdes décomposables, on pourra d'ailleurs consulter l'article de E. Koestlin, *Ueber die ebener algebraïschen Kurven, insbesondere dritter Ordnung, deren Konchoïden zerfallen* (*Wurttemb. Mitt.*, 1908).

Comme exemple particulier de lieu décomposable, on peut signaler le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une cardioïde; il se compose d'un cercle et d'un limaçon de Pascal.

R. Goormaghtigh.

1° Le lieu du pôle d'une droite fixe, par rapport aux coniques passant par deux de ses points et bitangentes à une conique fixe, se compose de deux droites.

Cas particuliers. — Lieu des centres des cercles bitangents à une conique (les axes).

Lieu des points équidistants de deux droites (les bissectrices).

2° Le lieu des points équidistants de deux cercles se compose de deux coniques homofocales.

3° Dans certains cas particuliers, les courbes isoptiques ou orthoptiques se décomposent (*voir I. M.*, **1916**, 73; **1918**, 105).

4° Le lieu du sommet d'un cône, passant par une conique fixe et bitangent à une quadrique donnée (lieu du sommet d'un cône circonscrit à la quadrique et bitangent à la conique), se compose de trois coniques situées dans les trois faces d'un trièdre conjugué par rapport à la conique et à la quadrique.

Cas particulier. — Le lieu du sommet d'un cône de révolution circonscrit à une quadrique (lieu du centre d'une sphère de rayon nul bitangente à la quadrique) se compose de trois coniques (focales) situées dans les plans principaux.

5° Le lieu du sommet commun à deux cônes qui passent par deux coniques A et B situées dans un même plan P, et dont deux arêtes communes rencontrent une troisième conique C située dans un autre plan Q, se compose de six coniques dont les plans passent par le pôle de l'intersection des deux plans P et Q par rapport à la conique C.

Cas particulier. — Le lieu du sommet commun à deux cônes qui passent par deux coniques situées dans un même plan, et qui admettent une direction commune de sections circulaires (lieu des points de vue d'où la perspective des deux coniques est formée de deux cercles), se compose de six cercles situés dans les plans perpendiculaires, en leurs milieux, aux six cordes communes aux deux coniques (Poncelet). P. HENDLÉ.

4981 (**1919**, 162) (A. COLUCCI). — *Relation d'Euler.* — Cf. *Nouvelles Annales*, 1845, p. 397; F. J., *Exercices de Géométrie*, 3ᵉ édition, p. 162, 465; PONCELET, *Applications d'Analyse et de Géométrie*, t. 1, note 3, p. 535; CATALAN, *Théorèmes et Problèmes*, 6ᵉ édition; VUIBERT, *Relations entre les éléments d'un triangle*; F. J., *Compléments de trigonométrie* (1886), p. 329; HADAMARD, *Leçons de Géométrie élémentaire*. 5ᵉ édition, t. 1, p. 300, 306.

Cette propriété, publiée en 1747, a été cherchée par Nicolas Fuss (1792), démontrée analytiquement par Jacobi (1828) et généralisée par Poncelet (1817-1822). H. SEBBAN.

4983 (**1919**, 162). — (J. PACÉ). — *Faisceau de cordes d'un polygone régulier.* — Cette question n'est qu'un cas particulier de la question 383, de Cesaro, parue dans *Mathesis*. La question **262** du même Journal, qui n'est qu'un cas particulier de la même question **383**, a été résolue par M. Fauchamps (*loc. cit.*, 1884, p. 41).

A. SEBBAN.

4985 (**1919**, 163) (L. VALROFF). — *Sur une condition pour qu'un nombre soit premier ou composé.* — Si l'on cherche à vérifier cette proposition pour des nombres de plus en plus élevés, on remarque que, dans certains cas la congruence, $x^n \equiv n \pmod p$ peut être vérifiée par plusieurs valeurs de n pour une même valeur de x.

Ainsi pour $p = 13$, on a

$$6^7 \equiv 7 \quad \text{et} \quad 6^{11} \equiv 11 \quad (\text{mod. } 13).$$

On a en outre $2^{10} \equiv 10$ et $11^{10} \equiv 10$, même module.

Comme $2^{13} - 1$ est premier, il convient de ne compter le nombre 6 qu'une seule fois, sinon le théorème serait en défaut.

En suivant cette convention nous avons vérifié que le théorème était exact pour $p = 17, 19, 23, 29, 31, 37$, mais nous le trouvons en défaut pour $p = 41$.

En effet, $2^{41} - 1$ n'est pas premier et l'on a cependant 11 racines primitives de 41 qui répondent à la congruence $a^n \equiv n$ (mod p), savoir :

7	$7^{16} \equiv 16$		
34	$34^{16} \equiv 16$		
11	$11^4 \equiv 4$	et	$11^{29} \equiv 29$
30	$30^4 \equiv 4$		
12	$12^{13} \equiv 13$		
28	$28^{19} \equiv 19$		
26	$26^7 \equiv 7$		
17	$17^2 \equiv 2$,	$17^4 \equiv 4$,	$17^{11} \equiv 11$
24	$24^2 \equiv 2$,	$24^4 \equiv 4$	
19	$19^{16} \equiv 16$,	$19^{17} \equiv 17$	
22	$22^{16} \equiv 16$,		

(mod 41)

Il serait intéressant de savoir par quelles considérations l'auteur de la question a été conduit à son énoncé. P. POULET.

4988 (**1919**, 165) (A. GÉRARDIN). — *Étude de l'équation indéterminée*

$$x^2 + y^2 + z^2 = k(x + y + z).$$

L'équation peut s'étudier par la méthode suivante basée sur trois principes très simples :

1° *On part de la formule évidente*

$$x = a(a+b+c), \qquad y = b(a+b+c), \qquad z = c(a+b+c),$$
$$k = a^2 + b^2 + c^2,$$

où l'on pourra prendre a, b, c positifs ou négatifs.

2° On remarque ensuite que, *si x, y, z satisfont à l'équation donnée, pour une certaine valeur de k, on aura encore une solution, pour la même valeur de k, si l'on remplace une ou plusieurs des quantités x, y, z par $k-x$, $k-y$, $k-z$.*

3° On observe enfin qu'*une simplification se présente chaque fois que x, y, z, k ont un facteur commun.*

Cette méthode, basée sur des identités du second ordre à trois variables, est plus générale et plus simple que celle indiquée dans l'énoncé, déduite de l'identité de la toroïde, qui est du quatrième ordre et ne renferme que deux paramètres arbitraires. Les exemples suivants montreront comment s'appliquent les principes énoncés ci-dessus.

Pour obtenir une solution avec $k=3$, cherchons-en d'abord une pour $k=6$, en prenant $a=1$, $b=2$, $c=-1$. Nous trouvons $x=2$, $y=4$, $z=-2$, ou, d'après le deuxième principe, $x=2$, $y=4$, $z=8$. En simplifiant, nous aurons

$$1^2+2^2+4^2=3(1+2+4).$$

Pour $k=5$, prenons $a=1$, $b=0$, $c=2$, d'où $x=3$, $y=0$, $z=6$, ou, d'après le deuxième principe, $x=2$, $y=5$, $z=6$; par conséquent,

$$2^2+5^2+6^2=5(2+5+6).$$

Afin de montrer la facilité avec laquelle on étudie l'équation par cette méthode, proposons-nous encore de retrouver les solutions numériques citées par M. Gérardin pour $k=17$, $k=11^2$.

Dans le premier cas, nous prenons $a=1$, $b=0$, $c=4$, d'où $x=5$, $y=0$, $z=20$ ou bien $x=5$, $y=17$, $z=20$; on a donc

$$5^2+17^2+20^2=17(5+17+20),$$

ou encore, en appliquant de nouveau le deuxième principe,

$$12^2+17^2+20^2=17(12+17+20).$$

Dans le cas de $k=121$, cherchons d'abord une solution pour $k=242$; on prendra $a=-13$, $b=3$, $c=8$, d'où $x=26$, $y=-6$, $z=-16$, ou, d'après le deuxième principe,

$$13^2+124^2+129^2=11^2(13+124+129).$$

En appliquant encore une fois ce même principe, on retrouve la solution cherchée :

$$108^2+124^2+129^2=11^2(108+124+129)$$

Cas où k est un carré. — D'après ce qui précède, l'équation aura toujours des solutions lorsque k est un carré, somme de deux carrés distincts, ou somme de trois carrés dont deux peuvent être égaux. Nous signalons quelques exemples obtenus facilement au moyen de la méthode que nous venons d'indiquer :

$$1^2 + 2^2 + 11^2 = 3^2(1 + 2 + 11),$$
$$4^2 + 25^2 + 28^2 = 5^2(4 + 25 + 28),$$
$$6^2 + 51^2 + 52^2 = 7^2(6 + 51 + 52),$$
$$24^2 + 84^2 + 93^2 = 9^2(24 + 84 + 93),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

R. Goormaghtigh.

L'égalité $x^2 + y^2 + z^2 = k(x + y + z)$ est possible en entiers positifs quel que soit k. Elle a autant de solutions qne $3k^2$ a de décompositions différentes en une somme de trois carrés.

Prenons $k = 17$, on a

$$\overline{(2x - k)}^2 + \overline{(2y - k)}^2 + \overline{(2z - k)}^2 = 867.$$

Or

$$867 = \overline{23}^2 + \overline{17}^2 + \overline{7}^2 = \overline{29}^2 + \overline{5}^2 + \overline{1}^2.$$

On tire les groupes de solution

$$x = 20, \qquad y = 17, \qquad z = 12,$$

solution déjà donnée; puis

$$x = 23, \qquad y = 11, \qquad z = 9.$$

Quel que soit k, carré parfait, l'égalité proposée est possible en entiers.

Faisons $k = 25$; on a à résoudre

$$\overline{(2x - k)}^2 + \overline{(2y - k)}^2 + \overline{(2z - k)}^2 = 1875,$$
$$1875 = \overline{43}^2 + \overline{5}^2 + \overline{1}^2,$$
$$= \overline{41}^2 + \overline{13}^2 + \overline{5}^2;$$

d'où les groupes de solution

$$x = 34, \qquad y = 15, \qquad z = 13;$$
$$x = 33, \qquad y = 19, \qquad z = 15.$$

R. Despujols.

Autre réponse de M. J. Pacé.

4990 (**1919**, 166) (A. Gérardin). — *Système d'équations indéterminées*

$$x - y = z^3, \qquad x^3 - y^3 = u^2.$$

On peut déduire des solutions du système de la formule générale suivante :

$$x = \frac{9}{4} a^3 b^5 (3a^6 b^2 + 6a^3 b - 1),$$

$$y = \frac{9}{4} a^3 b^4 (3a^6 b^2 + 6a^3 b - 1).$$

R. Goormaghtigh.

4993 (**1919**, 167) (M. Lecat). — *Permanents d'éléments x, 1, 0.* — Dans l'énoncé du théorème, une erreur s'est glissée : α et β désignent non ce qui est dit, mais bien respectivement les degrés en x de $(x, 1, 0)$ et de $(1, x, 0)$. S'il s'agit des permanents, pour lesquels il ne peut y avoir de termes qui se détruisent (il n'en est pas de même pour les déterminants ou autres fonctions considérées), on peut encore dire que α et β représentent respectivement les ordres de la plus grande transversale d'x et de la plus grande transversale d'éléments 1 dans la matrice $(x, 1, 0)$. La propriété est à peu près évidente : pour passer de $(x, 1, 0)$ à $(1, x, 0)$, il suffit, en effet, de remplacer x par $\frac{1}{x}$, puis de multiplier par x chacune des p tranches parallèles d'une direction arbitraire du permanent d'ordre p.

Observons, en passant, que dans le cas particulier où il n'y a pas de vide, la somme des coefficients est $(p!)^{n-1}$ dans chacun des deux polynomes représentés par ces permanents; et que si les domaines des 1 et des x sont équivalents, ayant même forme, qu'il y ait ou non des zéros, le développement est un polynome symétrique.

Naturellement, le problème énoncé au second alinéa de la question 4993 (p. 168) est maintenu. M. Lecat (Bruxelles).

4998 (**1919**, 170) (A. Gérardin). — *Impossibilité en nombres rationnels de*

$$3f^4 - 4f^3 g + 6f^2 g^2 + 4fg^3 + 3g^4 = x^2.$$

On peut supposer f et g entiers et premiers entre eux et l'on a

$$(3f^2 - 2fg - 3g^2)^2 + 32 f^2 g^2 = 3x^2;$$

si f ou g est pair, cette équation est impossible, car tout carré impair étant $\equiv 1 \pmod 8$, le premier membre est $\equiv 1 \pmod 8$ et

le deuxième est $\equiv 3 \pmod 8$; si f et g sont impairs,

$$\frac{1}{2}(3f^2 - 2fg - 3g^2)$$

est impair et l'on a

$$\left[\frac{1}{2}(3f^2 - 2fg - 3g^2)\right]^2 + 8f^2g^2 = 3\left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

ce qui est encore impossible, puisque le premier membre est impair et $\equiv 1 \pmod 8$, tandis que le deuxième impair est $\equiv 3 \pmod 8$.

L. Aubry.

J'ai retrouvé le théorème suivant qui résout la question :

« Toute quartique et en général toute forme, dans laquelle la somme des coefficients est $(3n \pm 1)$ ou impaire, n'est jamais triple ou double d'une puissance rationnelle. »

La forme normale du problème

$$3f^4 - 4f^3g + 6f^2g^2 + 4fg^3 + 3g^4 = x^2$$

étant

$$F^4 - 108F^3G + 162F^2G^2 + 108FG^3 + G^4 = 3X^2$$

avec pour somme de coefficients $[164 = 3.55 - 1]$, cette forme ne peut jamais devenir un triple carré, et le parallélépipède rectangle en entiers est impossible.

R. Despujols.

4999 (**1919**, 170) (A. Gérardin). — *Étude du système d'équations indéterminées*

$$x + y + z = a^3, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = b^3.$$

La formule suivante donne une double infinité de solutions

$$x = 2\alpha(13\alpha^2 + 9\alpha\beta + 3\beta^2), \qquad y = 2\beta(3\alpha^2 + 3\alpha\beta + \beta^2),$$
$$z = -2(9\alpha^3 + 12\alpha^2\beta + 6\alpha\beta^2 + \beta^3),$$
$$a = 2\alpha, \qquad b = 2(5\alpha^2 + 3\alpha\beta + \beta^2).$$

On peut donc énoncer ce résultat intéressant :

Un cube pair peut, d'une infinité de manières, être considéré comme la somme algébrique de trois entiers, tels que la somme de leurs carrés soit un autre cube pair.

La formule que nous indiquons permet de trouver des solutions en nombres plus petits que ceux indiqués dans l'énoncé; par exemple,

$$\alpha = 1, \quad \beta = -1;$$
$$x = 14, \quad y = -2, \quad z = -4, \quad a = 2, \quad b = 6;$$
$$\alpha = 1, \quad \beta = 1;$$
$$x = 50, \quad y = 14, \quad z = -56, \quad a = 2, \quad b = 18.$$

On établit le résultat général indiqué ci-dessus en résolvant d'abord la seconde équation du système proposé par la formule

$$x = \alpha(3\beta^2 + 3\gamma^2 - \alpha^2), \quad y = \beta(\beta^2 + \gamma^2 - 3\alpha^2),$$
$$z = \gamma(\beta^2 + \gamma^2 - 3\alpha^2),$$

et en observant ensuite que la somme $x + y + z$ prend la forme

$$(\beta + \gamma + 3\alpha)(\beta^2 + \gamma^2 - 3\alpha^2) + 8\alpha^3,$$

ce qui conduit à poser

$$\gamma = -(\beta + 3\alpha).$$

R. Goormaghtigh.

1° En supposant $a = 0$, on a les valeurs

$$4x = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta - 9\alpha\beta^2 + 3\beta^3,$$
$$2y = 3\beta(\alpha^2 - \beta^2),$$
$$2b = \alpha^2 + 3\beta^2,$$

α et β étant de même parité, toutes les quantités sont entières.

2° a est supposé différent de zéro.

La fonction

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) = \overline{ab}^3$$

possède une solution entière donnée par M. Gérardin.

En employant la substitution de M. Gérardin $x + m\xi$, on en obtiendra une infinité.

Les valeurs générales des x, ... seront fractionnaires, mais on prendra pour valeurs des variables les valeurs des numérateurs divisées par leur plus grand commun diviseur. Les deux facteurs du produit ci-dessus seront nécessairement des cubes.

Despujols.

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS

FONDÉ EN 1894 PAR C.-A. LAISANT ET ÉMILE LEMOINE

DIRECTEURS-RÉDACTEURS

Ed. MAILLET
Docteur ès Sciences
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées
Examinateur à l'École Polytechnique

A. MALUSKI
Agrégé de Mathématiques
Ancien Élève de l'École Normale supérieure
Proviseur du Lycée de Sceaux

A. BOULANGER
Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers
Répétiteur et Examinateur d'admission à l'École Polytechnique

---

Publication honorée d'une souscription du Ministère de l'Instruction publique

---

TOME XXVII — 1920

N^os 7 et 8. — JUILLET-AOUT 1920

PARIS

GAUTHIER-VILLARS et C^ie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1920

VOIR LES AVIS DIVERS ET LA CORRESPONDANCE à la page 2 de la Couverture

SOMMAIRE DES N°s 7 ET 8.

S'adresser, pour la rédaction, à M. *Ed. Maillet*, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, 11, rue de Fontenay, Bourg-la-Reine, ou à M. *A. Maluski*, proviseur du Lycée Lakanal, à Sceaux, ou à M. *A. Boulanger*, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, rue Gay-Lussac, 30, Paris; pour les abonnements et les tirages à part, à MM. *Gauthier-Villars et Cie*, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Rédacteur de service : M. A. MALUSKI, proviseur du Lycée Lakanal à Sceaux (Seine).

AVIS DIVERS

QUESTIONS récentes de MM. Balitrand, R. de Balmont, L. Bickart, A. Cunningham, F.-J. Duarte, J. Pacé, V. Thébault, Woodall, Worms de Romilly.

RÉPONSES récemment reçues de MM. L. Aubry, **5030**, **5036**, **5055**; Balitrand, **3474**; Brocard, **2040**, **4843**, **4932**, **5015**, **5030**, **5037**, **5040**, **5041**; Cashmore, **1240**; F. Cajori, **4846**; A. Cunningham, **4987**, **5041**, **5047**, **5055**; Goormaghtigh, **4188**, **4968**, **5028**, **5030**, **5038**, **5051**, **5054**; P. Hendlé, **4910**, **4916**, **4932**, **4948**, **5037**, **5040**, **5054**; R. Marchay, **4798**, **5038**; G. Métrod, **4165**; Nagel, **1419**; J. Pacé, **2258**, **5030**; G. Ricalde, **5036**.

Nous prions nos Correspondants de rappeler leur adresse dans chacun de leurs envois; de *n'écrire que sur le recto de la feuille*. Les formules doivent être écrites et les figures *faites avec le plus grand soin*, de façon qu'elles ne prêtent à aucune ambiguïté pour l'impression, particulièrement en ce qui concerne les indices, les signes, etc. En général, rien de ce qui est à imprimer ne doit être oublié, la ponctuation par exemple. La dactylographie est recommandée. Enfin, nous prions nos correspondants d'une manière tout à fait instante, de s'attacher, dans la mesure du possible, à ne pas omettre, lorsqu'ils citent un périodique, l'année de la publication, renseignement aussi important que celui de sa tomaison.

NÉCROLOGIE.

Charles-Ange LAISANT (1841-1920).

L'*Intermédiaire des Mathématiciens* vient de perdre le second de ses directeurs-fondateurs. Charles-Ange Laisant est mort sans souffrances, le 5 mai 1920, à Asnières, dans sa petite maison de la rue du Conseil que connaissaient si bien tous ses amis et tous ceux qui venaient lui demander une aide ou un conseil et qui ne s'en retournaient jamais déçus.

Né à la Basse-Indre (Loire-Inférieure) le 1er novembre 1841, il était le neveu et filleul du célèbre ophtalmologiste Ange Guépin, de Nantes.

Il commença ses études au lycée de Lorient, passa ensuite au collège Sainte-Barbe et fut admis à l'École Polytechnique en 1859. Il en sortit dans l'arme du génie. Capitaine en 1869, il prit part à la guerre de 1870-1871 ; il organisa les travaux de défense du fort d'Issy et fut, pour sa belle conduite, décoré en 1871 de la croix de la Légion d'honneur.

A la conclusion de la paix, il fut élu conseiller général du 1er canton de Nantes; en 1876, les électeurs de la Loire-Inférieure l'envoyèrent à la Chambre des députés. Il y siégea jusqu'en 1893, s'occupant avec beaucoup d'activité.

Malgré ses occupations parlementaires, il ne cessa pas de s'intéresser aux Sciences. Après avoir publié en 1874 un *Essai sur les fonctions hyperboliques* et une traduction du *Traité des Equipollentes* de Bellavitis, il présenta en 1877, devant la Faculté des Sciences de Paris, deux Thèses de doctorat sur les applications mécaniques du calcul des quaternions et sur un nouveau mode de transformation des courbes et surfaces.

Peu après, en 1881, il publia une *Introduction à la méthode des quaternions.*

En 1898 parut *la Mathématique : Philosophie et Enseignement*, où il exposa ses idées personnelles sur les Mathématiques et la manière de les enseigner.

Il reprit ses idées d'une façon élémentaire dans l'*Initiation mathématique* parue en 1906 chez Hachette. Ce fut le premier d'une série de petits volumes constituant la série des *Initiations* et qui parurent tous sous sa direction. Entre temps, sous le titre : *L'Éducation fondée sur la Science*, il fit quatre conférences de 1899 à 1903 et les réédita en 1905.

Il publia un *Recueil de Problèmes* chez Gauthier-Villars, qui contient en six volumes les problèmes les plus intéressants extraits des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, de la *Nouvelle Correspondance mathématique*, de *Mathesis* et des journaux de Mathématiques élémentaires et spéciales.

Parurent en collaboration :

Avec A. Buhl :

Annuaire des Mathématiciens (1911).

Avec Elie Perrin :

Premiers principes d'Algèbre (1892).
Problèmes de Géométrie (1894).
Application de l'Algèbre élémentaire à la Géométrie (1897).

Avec X. Antomari :

Questions de Mécanique à l'usage des élèves de la Classe des Mathématiques spéciales.

Il a publié en outre de nombreux mémoires et plusieurs notes dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, notamment dans les Volumes VI à XX (1879 à 1892) et XXI à XXIX (1893 à 1901), dans les *Comptes rendus de l'Association française pour l'Avancement des Sciences*, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*

de Darboux et aussi dans celui de la *Société Philomathique de Paris*.

En 1894, il fonda avec Lemoine l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, prit en 1896 la direction des *Nouvelles Annales de Mathématiques* et fonda enfin l'*Enseignement mathématique* avec H. Fehr, professeur à l'Université de Genève.

Toutes ses publications attestent le souci qu'il avait des questions pédagogiques. Professeur et éducateur, il n'a jamais cessé de l'être, tant au collège Sainte-Barbe où il occupa une chaire préparatoire à Saint-Cyr, de 1894 à 1895, qu'à l'Ecole Polytechnique où il fut répétiteur de Mécanique du 30 mai 1895 au 14 mars 1913 et examinateur d'admission de 1899 à 1910.

Laisant laisse à tous ceux qui l'ont connu le souvenir d'un savant aussi modeste qu'obligeant. Les directeurs de l'*Intermédiaire* s'associent à la douleur de la famille; ils n'oublieront pas la bienveillance amicale qu'il leur a toujours témoignée. Nos lecteurs partageront ces sentiments.

La Direction.

QUESTIONS.

5058. [X5] Tous les historiens des mathématiques parlent de machines arithmétiques inventées, l'une par Pascal et l'autre par Leibniz, mais ils ne donnent aucun renseignement sur leur nature et leur utilité. En conséquence, je serais bien reconnaissant si quelque correspondant pouvait et voulait répondre aux questions suivantes :

a. Ces machines ont-elles eu un si médiocre succès à cause de l'état où se trouvait la mécanique pratique au XVII[e] siècle, ou a-t-on reconnu qu'elles ne pouvaient soulager réellement les calculateurs?

b. Les concepts théoriques dont se servirent Pascal et Leibniz ont-ils été appliqués après ?

c. Dans le cas contraire, serait-il utile de poursuivre et de perfectionner leurs idées ? GINO LORIA.

5059. [V1] Dans l'Ouvrage intitulé : *La Langue internationale et la Science*, par L. Couturat, O. Jespersen, R. Lorenz, etc. (Paris, Ch. Delagrave, 1909), on lit page 48 :

« Comme dans les mathématiques ce ne sont pas seulement les quantités, mais encore les opérations, qui sont indiquées par des signes particuliers, universellement compréhensibles, il est déjà possible, en ajoutant très peu de chose, d'exprimer de longues séries de pensées mathématiques internationalement compréhensibles, c'est-à-dire intelligibles pour celui qui connaît la Science et ses symboles. Le professeur Peano, de Turin, publie depuis assez longtemps des œuvres écrites de cette manière. Ici se trouve donc réalisé l'idéal d'une écriture purement idéographique, qui peut être lue par le spécialiste, sans qu'il ait dans l'esprit les mots d'une langue déterminée.... »

1° Je désirerais quelques renseignements bibliographiques sur les œuvres du professeur Peano visées ci-dessus.

2° Des travaux dans cet ordre d'idées ont-ils été publiés par d'autres mathématiciens ? Bibliographie.

M. AILLET.

5060. [$L^1$9d] J'ai trouvé que le périmètre de l'ellipse pouvait s'exprimer par la formule

$$\frac{s}{\pi(a+b)} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 + \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^6 + \dots$$

Il est probable que cette relation se ramène à celle qui est attribuée à Ivory dans l'*E. S. M.*, t. III, n° 3, I, p. 158.

Je n'ai pu vérifier le fait, mais il est étonnant que les traités classiques ne citent pas ce développement qui est d'un

emploi beaucoup plus pratique que celui d'Euler suivant les puissances de l'excentricité. J. SER.

5061. [**E5**] Soit γ_h^p le coefficient de x^h dans le développement de $(1+x)^p$

$$\gamma_h^p = \frac{p(p-1)\ldots(p-h+1)}{h!}$$

et supposons p *quelconque* sous la seule réserve $2p+1>0$, les formules suivantes sont-elles connues ?

$$\frac{2^{2p+1}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}\theta \, d\theta = \frac{2^p}{\pi}\int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^p \, d\theta$$

$$= 1+\sum_{h=1}^{h=\infty} (\gamma_h^p)^2 = \frac{2}{p}\sum_{h=1}^{h=\infty} h\,(\gamma_h^p)^2.$$

Comme vérification on obtient, en faisant $p=\frac{1}{2}$,

$$\frac{4}{\pi} = 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2.4}\right)^2+\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2+\ldots$$

$$= 4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2.4}\right)^2+3\left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2+\ldots\right].$$

J. SER.

5062. [**L¹18c**] Je trouve que le lieu des foyers des coniques qui sont normales à trois droites données et sont tangentes à une conique donnée est une courbe du 306ᵉ ordre. Ce résultat est-il exact ? P. MOREL.

5063. [**L¹18c**] On sait que le lieu des foyers des coniques tangentes à quatre droites est une courbe du troisième ordre. Quel est le lieu des foyers des coniques normales à quatre droites données ?

Par des raisonnements assez longs, je trouve une courbe du 153ᵉ ordre. Je serais heureux de voir par le calcul confirmer ou infirmer ce résultat, si toutefois les méthodes de la géométrie analytique, qui s'appliquent si facilement lorsqu'il s'agit de quatre tangentes, peuvent encore pratiquement donner le résultat lorsqu'il s'agit de quatre normales.

P. MOREL.

5064. [I19c] Dans son Mémoire : *Recherches sur l'analyse indéterminée* (Moulins, 1873), Édouard Lucas écrit, page 19 :

« L'étude de cette équation, c'est-à-dire de l'équation

$$3f(f^2-g^2)\pm f(f^2-9g^2)=a^3,$$

et d'autres analogues, fera l'objet d'un nouveau travail, dans lequel j'ai démontré que les formules (A) et (B) résolvent complètement l'équation proposée (c'est-à-dire l'équation $x^3+y^3=9z^3$). »

A-t-il tenu sa promesse? Si oui, où a-t-il publié ses recherches à ce sujet? T. Nagel (Christiania).

5065. [I3] Désignons par ν_p le nombre des racines de la congruence

$$F(x)\equiv 0 \pmod p,$$

$F(x)$ étant un polynome entier irréductible donné à coefficients entiers, et p étant un nombre premier quelconque.

Peut-on alors démontrer la formule

$$\sum_{p\leq x}\nu_p\frac{\log p}{p}=\log x+O(1),$$

où la somme est étendue à tous les nombres premiers $p\leq x$?

La validité de la formule proposée est bien connue, lorsque $F(x)$ est le polynome dont les zéros sont les racines primitives $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. T. Nagel (Christiania).

5066. [K¹21b] Quels sont les divers instruments connus donnant la trisection de l'angle? Parmi ceux-ci, en existe-t-il qui tracent la conchoïde du cercle d'un mouvement continu? Existe-t-il des instruments pouvant diviser l'angle en n parties égales? J. Pacé.

5067. [H12] Si l'on considère deux séries récurrentes linéaires de deuxième ordre d'échelles

$$y_{n+2}-py_{n+1}+qy_n=0,$$
$$y'_{n+2}-p'y'_{n+1}+q'y'_n=0,$$

on sait que les produits y_n, y'_n forment une suite récurrente de quatrième ordre. Dans le cas des fonctions numériques étudiées par Lucas (suites de Fibonacci, Fermat, etc.), on obtient ainsi des suites qui jouissent comme ces fonctions de propriétés particulières quant à la factorisation de leurs termes.

Il n'est pas nécessaire pour cela que les coefficients p, p', q, q' soient entiers; si p et p', q et q' sont irrationnels conjugués, réels ou imaginaires, la suite du quatrième ordre a tous ses termes entiers. L'intérêt de ces suites est que, tout en jouissant de propriétés arithmétiques analogues à celles des suites de deuxième ordre, elles ont une croissance dans certains cas beaucoup moins rapide, ce qui permet de les étudier sur une plus grande étendue. Par exemple, le 67^e terme de la suite d'échelle

$$u_{n+4} - u_{n+3} - u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$$

(premiers termes 0, 1, 1 et 3) n'a que huit chiffres.

Il semble possible d'obtenir des suites d'ordre encore plus élevé (16 par exemple) jouissant de propriétés analogues.

Je demande si ce sujet a déjà été abordé et les résultats obtenus. P. Poulet.

5068. [**I20b**] Chercher les formes les plus simples

$$N = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

telles que N soit le produit de

$$mx^2 + nxy + py^2 \quad \text{par} \quad qx + ry$$

ou d'autres formes analogues, les coefficients étant des entiers positifs, nuls ou négatifs. A. Gérardin.

5069. [**I19c**] (Σ) Pour résoudre en entiers

$$a^4 + hb^4 = (a - x)^4 + h(b + x)^4,$$

j'ai trouvé dans mes premières recherches que pour

$$a = 7, \quad b = 2, \quad h = 17, \quad x = 1$$

au moins, les trois expressions

$$(bh - a), \quad b^2 h + a^2, \quad b^3 h - a^3$$

étaient simultanément divisibles par $\frac{(h+1)}{2}$.

Étudier cette question et donner d'autres exemples pour les degrés 2, 3, 4, 5. A. GÉRARDIN.

5070. **[I17c]** (ΣS) On peut toujours représenter les nombres

$$9(2^{4n}+1) \quad \text{et} \quad 9(2^{4n+2}+1)$$

par des sommes de *trois* carrés.

Exemple : $n=2$.

$$9.(2^8+1)=18^2+30^2+33^2, \qquad 9(2^{10}+1)=30^2+63^2+66^2.$$

J'ai des identités générales où toutes les racines des carrés sont de la forme $2^x \pm h$, et j'ai obtenu d'autres valeurs pour le coefficient.

En chercher de nouvelles. A. GÉRARDIN.

5071. **[I19c]** Dans son article *Sur l'équation indéterminée* $x^2+cy^2=z^3$ (*N. L. M.*, 1892, p. 11), le P. Th. Pépin dit : « Les formules (5) et (6) donnent deux carrés qui deviennent des cubes par l'addition du nombre 307, savoir 36, 1024 :

$$6^2+307=7^3, \qquad 32^2+307=11^3.$$

Quels sont les carrés qui jouissent de la même propriété de devenir des cubes lorsqu'on leur ajoute 307? C'est là une question que l'état actuel de la science ne permet pas de résoudre complètement. »

Je puis indiquer la nouvelle solution :

$$307=71^3-598^2.$$

Il n'y en a pas d'autre pour la racine du carré inférieure à 12000.

Chercher une solution en nombres entiers plus grands. Le nombre des solutions est limité, d'après la majorité des auteurs. A. GÉRARDIN.

RÉPONSES.

4545 (**1915**, 171) (L. MONGARDON). — *La canonnade et les conditions atmosphériques, et questions plus générales* (**1919**, 82). — Que la question posée demeure entière, comme l'observe M. Maillet, je l'admets bien volontiers. Je veux simplement constater que la recherche mathématique des effets d'un ébranlement sur la pluie me paraît assez peu justifiée, s'il est prouvé que l'expérience ne l'a pas confirmée. Je vois, par exemple, dans l'*Annuaire de la Société météorologique de France* pour 1915-1919, tome 63, deux articles particulièrement suggestifs.

Le canon et la pluie, par A. Angot (p. 103-109) et *La défense contre la grêle*, etc., 1912-1917, par F. Courty (p. 110-117).

Ces deux Notes ne peuvent amener à affirmer une influence indiscutable de la canonnade sur les variations du temps; mais il reste un préjugé tenace et qui flatte le secret désir que l'homme soit capable d'exercer une influence sur l'atmosphère aussi bien que d'en prédire les effets. H. BROCARD.

4639 (**1916**, 97) (P. APPELL). — *Généralisation de la formule de Stokes* (**1916**, 167; **1918**, 57). — La formule

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z},$$

donnant la courbure moyenne comme divergente d'un vecteur unitaire porté par la normale à une surface au point de coordonnées x, y, z, est due à Borchardt. Ce géomètre donne d'ailleurs simultanément une formule pour la courbure totale : en posant

$$\xi = x - \lambda\alpha, \qquad \eta = y - \lambda\beta, \qquad \zeta = z - \lambda\gamma,$$

le déterminant

$$\sum \pm \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial z},$$

égalé à zéro, donne une équation du second degré en λ dont les racines sont les courbures principales de la surface.

M. Clapier a récemment retrouvé ces formules de Borchardt dans une question qui paraît être le point de départ de sa Thèse.

M. Clapier avait ainsi l'occasion de remarquer que le problème des surfaces minima était équivalent à un problème de la théorie des tourbillons : *Détermination des champs de vecteurs à tourbillons constants en grandeur.*

Voici une liste de références :

Deux théorèmes de M. BORCHARDT sur les fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique et sur les rayons de courbure principaux des surfaces (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. **14**, 1855, p. 26-27).

C.-W. BORCHARDT. — Sur la quadrature définie des surfaces courbes (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. 19, 1854, p. 369-394).

C. CLAPIER. — Sur la recherche des surfaces minima (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4e série, t. **14**, 1914, p. 359-363).

F.-C. CLAPIER. — *Sur les surfaces minima ou élassoïdes* (Thèse de Doctorat ès sciences mathématiques), Paris, mai 1919, p. 45 et suiv.

E. TURRIÈRE.

4727 (**1917**, 30) (A. GÉRARDIN). — *Équation indéterminée :*

$$\overline{(-y+mq^3)}^4 + hq^4 \equiv \overline{(-m+qy)}^4 + h$$

avec :

$$h = \left[\overline{(y+mq)}^2 - \overline{(m+mq^2)}^2\right]\left[\overline{(y-mq)}^2 + \overline{(m-mq^2)}^2\right].$$

Faisant $y = 3$, $q = 2$, $m = -1$, on a

$$\overline{11}^4 + 51.\overline{2}^4 = 7^4 + 51.4^4.$$

Pour $y = 5$, $q = -2$, $m = 1$, il vient

$$\overline{13}^4 + 58.\overline{2}^4 = \overline{11}^4 + 58.\overline{4}^4.$$

Etc.

On peut trouver pour tous les degrés de semblables identités. Les quantités x, y, z, t restant relativement simples, le calcul de h sous forme de polynome devient très pénible, dès le cinquième degré.

Pour $m = 3$, l'identité est possible quel que soit h.

R. DESPUJOLS.

4893 (**1919**, 5) (M. Rignaux). — *Équation indéterminée.* — Soit l'équation

$$ab(a^2+b^2)=cd(c^2+d^2).$$

Posons

$$a=m+ni,$$
$$b=m-ni,$$
$$c=p+qi,$$
$$d=p-qi,$$

il vient

$$m^4-n^4=p^4-q^4$$

et l'on est ramené à la question **4913** :

Résolution de l'équation

$$X^4+Y^4=Z^4+T^4.$$

Auric.

4930 (**1919**, 71) (P. Poulet). — *Équations algébriques et suites récurrentes.* — Cette méthode de résolution par approximations des équations algébriques se trouve indiquée par Euler dans ses *Éléments d'Algèbre* (traduction française, 1798, t. 1).

A ce propos, le traducteur donne en note les renseignements suivants : « La méthode d'approximation qui suit se fonde sur la théorie des séries qu'on nomme *récurrentes*, et qui ont été imaginées par M. de Moivre. On doit cette méthode à M. Daniel Bernoulli, qui l'a donnée dans les *Anciens Commentaires de Pétersbourg*, t. 3. Mais M. Euler la présente ici sous un point de vue un peu différent. Ceux qui souhaiteront d'approfondir ces matières peuvent consulter les Chapitres XIII et XVII du premier Volume de l'*Introd. in Anal. inf.* de notre célèbre auteur : ... ».

R. Ratat.

4933 (**1919**, 72) (H. Kœchlin). — *Sur certains triangles semblables* (**1919**, 157 ; **1920**, 19).

Appelons $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$ les vecteurs représentatifs du premier triangle $A_1A_2A_3$ et m_1, m_2, m_3 les coordonnées barycentriques de M dans ce triangle de référence.

On a les formules connues :

$$\overline{MA_1}=m_2\overline{a_3}-m_3\overline{a_2},\qquad \overline{MA_2}=m_3\overline{a_1}-m_1\overline{a_3},$$
$$\overline{MA_3}=m_1\overline{a_2}=m_2\overline{a_1}.$$

Appelons $\overline{b_1}$, $\overline{b_2}$, $\overline{b_3}$ les vecteurs représentatifs du second triangle $B_1B_2B_3$.

Les triangles $C_3B_1B_2$ et MA_2A_1 sont semblables, d'où

$$\frac{\overline{C_3B_1}}{\overline{MA_2}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{A_2A_1}} = -\frac{\overline{b_3}}{\overline{a_3}} \quad \text{et} \quad \overline{C_3B_1} = -\frac{\overline{b_3}}{\overline{a_3}}(m_2\overline{a_1} - m_1\overline{a_3}).$$

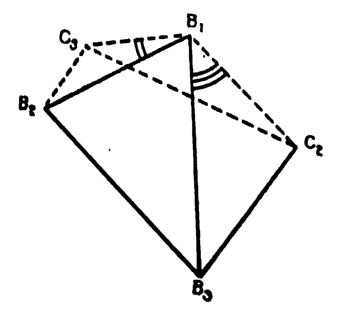


Fig. 1.

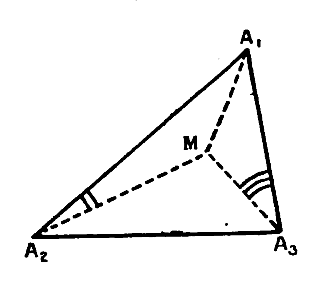


Fig. 2.

De même, les triangles $C_2B_1B_3$ et MA_3A_1 sont semblables, d'où

$$\frac{\overline{C_2B_1}}{\overline{MA_3}} = \frac{\overline{B_1B_3}}{\overline{A_3A_1}} = -\frac{\overline{b_2}}{\overline{a_2}} \quad \text{et} \quad \overline{C_2B_1} = -\frac{\overline{b_2}}{\overline{a_2}}(m_1\overline{a_2} - m_2\overline{a_1}).$$

On tire de ce qui précède :

$$\overline{C_2C_3} = \overline{C_2B_1} = \overline{C_3B_1} = -m_1(\overline{b_2} + \overline{b_3}) + \overline{a_1}\left(\frac{m_2\overline{b_2}}{\overline{a_2}} + \frac{m_3\overline{b_3}}{\overline{a_3}}\right),$$

et comme $\overline{b_2} + \overline{b_3} = -\overline{b_1}$ il vient

$$\overline{C_2C_3} = \overline{a_1}\left(\frac{m_1\overline{b_1}}{\overline{a_1}} + \frac{m_2\overline{b_2}}{\overline{a_2}} + \frac{m_3\overline{b_3}}{\overline{a_3}}\right),$$

d'où, l'expression entre parenthèses étant symétrique,

$$\frac{\overline{C_2C_3}}{\overline{a_1}} = \frac{\overline{C_3C_1}}{\overline{a_2}} = \frac{\overline{C_1C_2}}{\overline{a_3}} = \frac{m_1\overline{b_1}}{\overline{a_1}} + \frac{m_2\overline{b_2}}{\overline{a_2}} + \frac{m_3\overline{b_3}}{\overline{a_3}},$$

ce qui démontre bien la similitude des triangles $C_1C_2C_3$ et $A_1A_2A_3$ avec une interprétation vectorielle du rapport de similitude.

A. Auric.

847. 1919 [illegible] de la distance à [illegible] peut produire la [illegible] — Avec

réserves sur le véritable état physique du noyau du Soleil (*Ann. de Chimie et de Phys.*, t. 8, 1906, p. 181), je dois dire que l'ordre de grandeur de la distance, qu'on va trouver, fait passer le diamètre apparent du Soleil, de sa valeur terrestre, 32′, à 76° et plus, ce qui rend la loi de Stefan moins applicable et les autres lois de l'énergie rayonnante moins maniables.

Conditions physiques essentielles, celles de la pression. — Pour ne pas envisager une pure fiction, il faut que ce soit une masse de matière indépendante, donc un sphéroïde, s'approchant du Soleil le long d'une orbite ne la précipitant pas sur lui, la simple chute étant un cas trop spécial.

Les seules masses cosmiques à périhélie intramercuriel visible sont les comètes; mais on doit y prévoir, noyés dans le rayonnement solaire, une infinité de météores dont la masse croît de l'étoile filante au bolide et même à des astéroïdes minuscules d'excentricité arbitraire. On ne voit même pas toutes les comètes (observation de Souhag).

Les astéroïdes possibles, comme l'essaim hypothétique de Tisserand remplaçant l'introuvable Vulcain ([1]) de Le Verrier, ont peu de chances de dépasser la grosseur de Vesta, Cérès ou Pallas; ils n'ont donc pas 500^{km} de diamètre, car on verrait des passages, le disque est assez observé.

Je conclus donc que, l'intensité de la pesanteur à la surface du sphéroïde étudié étant proportionnelle au produit du rayon par la densité moyenne, la pression, même avec la densité du fer et une atmosphère haute et formée comme la nôtre, ne dépasse pas 3^{cm} de mercure. Le point critique est donc hors de cause; d'ailleurs, très élevé pour tout métal, il est, même pour le mercure, inconnu, dépassant 1000° C. (1273^{a} absolus).

Rowland, d'après le spectre, attribue au Soleil tous nos corps simples. S'ils se vaporisent par l'ébullition, celle-ci a été réalisée pour tout corps simple par Moissan (*Ann. de Chim. et de Phys.*, t. 8, 1906, p. 145-181), au four électrique par 700 à 800 ampères et 110 volts, en 5 à 20 minutes. Kraft et Bergfeld, avec certaines hypothèses, trouvent 3700° C, pour le point d'ébullition du *tungstène* W, le plus difficile à *bouillir*, mais non le plus réfractaire, qui est le carbone

([1]) Il y a peu de passages authentiques d'une tache noire ronde sur le Soleil. Celle de Lescarbault (26 mars 1853) fut traitée comme planète intramercurielle par Le Verrier, qui ne réussit pas à la faire retrouver. Je l'attribuerai donc à quelque astéroïde aberrant, d'éléments peut-être comé-taires. Sa distance périhélie minima était trop grande pour nous intéresser ici.

non fondu. Le carbone C (P.E. 3600° C.), répandu dans tous les corps célestes, et le titane Ti, métal-métalloïde, exigent moins. Je prendrai donc $T^{\alpha} = 4000^{\alpha}$ abs. pour une ébullition rapide, plus accélérée encore sous 3^{cm}, si l'astéroïde reste peu au périhélie (éléments cométaires). Si l'ellipse est planétaire, il suffit de $T^{\alpha} = 3873^{\alpha}$: le carbone y bout, et, à basse pression, tous les métaux, fondant bien plus bas, se vaporiseront.

D'autre part, le *Traité de Météorologie* de M. A. Angot, p. 74 (Gauthier-Villars, 1916), dit que « à la surface du sol... en France, on a quelquefois obtenu 60°C. : ... au Sahara et en Australie ... dépassé 70° et 80° ... abrité du vent ». Expérimentalement je sais qu'on y arrive en peu de temps : même à Paris, une boîte plate noircie, isolée, et protégée de la convection dans l'air, fera, normale aux rayons solaires d'été, fondre l'acide stéarique (70° C. ou 343^{α}). A la même distance, la surface lunaire, en 15 jours, va à 100°. J'adopterai la donnée la plus modérée 329^{α} ou 56° C. qu'atteignent en Algérie un thermomètre ensoleillé ou au Fezzân les sables. Un peu trop faible, elle se prête mieux au calcul que la constante de la radiation, assez incertaine.

Distance. — Soit T^{α} la température requise, T^{α}_{0} la plus modérée des évaluations terrestres ou 329^{α} : la distance x en unités astronomiques a est telle que $(T^{\alpha})^2 x = \text{const.} = (T^{\alpha}_{0})^2$; d'où, en rayons solaires R,

$$x = a(147,57)^{-1} = 1,454\,R$$

si $T^{\alpha} = 4000^{\alpha}$ (ébullition) : et, si $T^{\alpha} = 3873^{\alpha}$,

$$x = 1,551\,R = a(138,58)^{-1}$$

(vaporisation à basse pression). Pour $x = 1,551\,R$, le diamètre apparent du Soleil atteint 80° $\left(\text{sa surface est à} < \frac{3}{5} R\right)$.

Je fais alors intervenir le temps. Illimité si l'orbite est planétaire, il borne vite la durée d'une planète gazeuse si rapprochée. Certes on admet des couples physiques stables d'étoiles gazeuses peu denses presque tangentes : mais ici il y a disproportion des masses et des pesanteurs, avec un soleil plus dense que l'eau. M. T. Bredechin a déjà signalé, pour une planète gazeuse, toute une zone d'instabilité qui la dissipe entièrement. Ainsi tout ce que n'englobera pas le Soleil se dispersera ou rejoindra l'anneau de lumière zodiacale.

Avec de faibles excentricités e de comète (0,4 à 0,8), la conclusion se maintient, car même avec périhélie à 1,6R, la révolution

dure moins d'une semaine. La vitesse périhélie, quel que soit e, est $>$ 300 km : sec (loi des aires).

Soit enfin e très voisin de 1 : le corps subsistera après son court passage périhélie, mais s'y vaporisera presque en entier, d'où une chevelure, et les forces orientées (répulsives, attractives, etc.) de T. Bredechin produiront l'aspect cométaire là où il n'existait pas déjà. Un noyau plus dense suit encore la loi de Newton, mais tend à se désagréger à ce périhélie rapproché, de l'ordre de celui des comètes 1882, I et 1882, II : la deuxième (à 3800^{α} selon ces calculs) s'est fragmentée en *cinq*, avec noyau principal 3 jours visible en plein midi comme celle de 1532, les deux de 1402 (mars et juin), celle de 43 ans avant J.-C., etc.

C'est *un mode* de génération des comètes. Dépourvues de la stabilité des planètes, elles n'ont presque jamais décrit une hyperbole *près de nous*, mais suivies à l'aphélie, semblent provenir de corps (nuages cosmiques, soit primitifs, soit de collision; ou bolides ou astéroïdes), d'origine sidérale, ou solaire, qui, captés aux limites par les quatre grandes planètes, et la ou les transneptuniennes, accomplissent des révolutions, puis sont parfois tout à coup relancées pour toujours à l'infini sur une hyperbole.

Vérifications. — C'est l'étude physique, ou des comètes, ou de la température de la surface rayonnante du Soleil. Une méthode directe et de choix pour celle-ci est celle des températures au foyer d'un miroir ([1]). M. Ceraski, à Moscou, avec un miroir de 1^{m} de foyer, 1^{m} d'ouverture, a fondu une série de minéraux, jusqu'à la chaux inclusivement. Il admet un minimum de 3500° C., qu'il semble à tort croire incomparablement inférieur a l'inconnue. C'est sans doute plus que n'admit d'abord M. Violle (1600° C. et 2000°-3000° C.; mais Moissan (*loc. cit.*) croit l'inconnue entre 6000-7000° C.; (M. Le Chatelier, M. Wilson), d'une part, et 3000° C. de l'autre. *On le saura si des miroirs donnent des résultats d'allure asymptotique suivant leur ouverture.* H. DE MONTILLE.

4964 (**1919**, 104) (A. GÉRARDIN). — *Équations indéterminées* (**1920**, 30). — Il s'agit de résoudre le système

$$(x+h)^3+(y-h)^3 = Am^3,$$
$$x^3+y^3 = Bm^3,$$
$$(x-h)^3+(y+h)^3 = Cm_3.$$

([1]) Minimum incontesté (principe de l'équilibre mobile de température).

On trouve facilement par combinaison :

$$6h^2(x+y) = (A + C - 2B)m^3,$$
$$(A + C - 2B)(x-y) = h(A - C);$$

d'où les valeurs de x, y :

$$(x,y) = \frac{(A + C - 2B)m^3}{12h^2} \pm \frac{h(A - C)}{2(A + C - 2B)}$$
$$= \frac{(A + C - 2B)^2 m^3 \pm 6h^3(A - C)}{12h^2(A + C - 2B)}.$$

On a, d'autre part,

$$Bm^3 = x^3+y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = \frac{x+y}{4}[(x+y)^2 + 3(x+y)^2];$$

d'où il vient, en éliminant x et y :

$$(A + C - 2B)^4 m^6 = 108h^6(-A^2 - 16B^2 - C^2 + 8AB + 8BC + 2CA).$$

En posant $A = a^2$, $B = b^2$, $C = c^2$, on voit immédiatement que la quantité entre parenthèses, dans le second membre, est égale à $16S^2$, S étant la surface du triangle de côtés a, $2b$, c,

On a, d'autre part, d'après un théorème connu,

$$a^2 + c^2 - 2b^2 = 2d^2,$$

d étant la médiane de ce même triangle correspondant au côté $2b$.

En appelant λ le côté du triangle équilatéral équivalent en surface au triangle précédent, on trouve, toutes réductions faites,

$$2d^4 m^3 = 9\lambda^2 h^3,$$

de sorte que les valeurs de x et y deviennent

$$(x,y) = \frac{h[3\lambda^2 \pm (a^2 - c^2)]}{4d^2}.$$

Ces valeurs sont susceptibles d'une construction géométrique très simple.

Appelons μ le côté du triangle équilatéral de surface $\frac{3\Sigma}{2}$; en d'autres termes, posons $\mu = \lambda\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Construisons le triangle ABC de côtés a, $2b$, c; élevons une perpendiculaire DP au milieu D de AC de manière à avoir AP $= \mu$. Rabattons DP en DQ, ce dernier point étant sur la hauteur BH; joignons QA $= u$, QC $= v$ on aura les formules résolvant complète-

ment la question au point de vue algébrique et géométrique

$$\frac{x}{u^2} = \frac{y}{v^2} = \frac{h}{2d^2} = \frac{m}{2\sqrt[3]{3d^2\mu^2}}.$$

Ces formules pourront sans doute être utilisées pour la résolution numérique de la question posée. A. AURIC.

4966 (**1919**, 104) (A. GÉRARDIN). — *Équation indéterminée* (**1920**, 32). — Si l'on remarque que

$$(2y^2+1)(2z^2+1) = 4y^2z^2+4yz+1+2(y^2-2yz+z^2),$$

il suffira de poser

$$x = 2yz+1, \qquad r = y-z.$$

R. Ratat.

4973 (**1919**, 131) (J. PACÉ). — *Carré parfait de la forme aaaa.* — Soit r la base du système de numération; et soit N le nombre $\overline{aaaa} = z^2$, où a doit être $< r$. On a la condition

$$N = ar^3 + ar^2 + ar + a = a(r+1)(r^2+1) = z^2.$$

On peut prendre $a = \alpha^2 < r$. Cela donne

$$N' = (r+1)(r^2+1) = \left(\frac{z}{\alpha}\right)^2.$$

Il est bien connu que $(r+1)$, (r^2+1) n'ont pas de diviseur commun, excepté seulement le facteur 2. On considère deux cas, r pair et r impair.

1° *r pair :* Ceci exige $r+1 = \alpha^2$, et $r^2+1 = \beta^2$ (une impossibilité);
2° *r impair :* Ceci exige $r+1 = 2\alpha^2$, et $r^2+1 = 2\beta^2$.

La dernière condition, $(r^2-2\beta^2 = -1)$, démontre que r est un terme de la série bien connue $r = 1, 7, 41, 239, 1393$, etc. Les seules valeurs qui satisfont à la première condition $(r+1 = 2\alpha^2)$ sont $r = 1$ et 7. Et la condition $a = \alpha^2 < r$ donne la seule solution $a = 4$, $r = 7$.

Si l'on prend $a = k\alpha^2 < r$, on obtient

$$N' = k(r+1)(r^2+1) = \left(\frac{z}{\alpha}\right)^2$$

et k doit être facteur de $(r+1)(r^2+1)$. Il semble impossible de résoudre cela avec la condition $a < r$. A. CUNNINGHAM.

Une réponse à la question proposée se trouve dans le *Journal de Vuibert*, 44ᵉ année, p. 25, où d'ailleurs la même question a été proposée par le même auteur.

A rapprocher de cette question le n° **2722** proposé par M. P.-F. Teilhet (**1904**, 10). H. Sebban.

(*) Autres réponses de MM. R. Goormaghtigh, G. Métrod et H. de Montille.

4981 (**1919**, 162) (A. Collucci). — *Au sujet de la formule*

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Euler, à qui cette formule est attribuée, ne l'a pas donnée textuellement; elle a dû être un peu modifiée, comme je l'exposerai ci-après.

Etant donnés un cercle de rayon R, et à son intérieur un cercle de rayon r, soit d la distance des centres, il existe des triangles à la fois inscrits au grand cercle et circonscrits au petit cercle, si l'on a la relation (ou condition de fermeture)

$$R^2 - d^2 = 2Rr.$$

Sans en rapporter pour le moment, de démonstration, on peut trouver dans l'*Encyclopédie* Molk : *Coniques*, 1911, p. 105-106, des références bibliographiques particulièrement intéressantes relatives à son invention, qui appartient à W. Chapple (*Miscellanea curiosa mathematica*, Londres, 1746).

L. Euler (*Novi Comm. Acad. Petropol.*, t. **11**, 1765, éd. 1767, p. 114) présenta la condition de fermeture du triangle sous une forme un peu moins simple

$$d^2 = \frac{a^2b^2c^2}{16S^2} - \frac{abc}{a+b+c},$$

mais elle se ramène identiquement à celle de Chapple, eu égard aux relations

$$abc = 4RS, \qquad r = \frac{2S}{a+b+c}.$$

Quelque temps avant Euler, L. Landen (*Mathematical lucubrationes*, London, 1755, p. 5) l'a obtenue comme cas particulier d'une formule plus générale.

Ces trois articles doivent donc vraisemblablement être considérés

comme démonstrations distinctes, mais je ne puis préciser en quoi elles diffèrent.

On trouvera peut-être quelques autres indications dans deux écrits de J. Steiner (*Crelle*, t. 2, 1827) et de J. Mention (*Bull. Acad. Pétersb.*, 1860). H. BROCARD.

4982 (**1919**, 162) (A. COLUCCI). — *Pour la bibliographie du problème des trois corps.* — Le problème des trois corps a, depuis Newton, exercé la sagacité des plus grands mathématiciens et donné lieu à une importante documentation indiquée déjà sommairement dans les réponses à la question 1075 (**1897**, 149; **1911**, 31 et 129).

Ce problème d'Euler n'est pas encore résolu dans le sens algébrique de solutions d'équations de l'Astronomie, mais un progrès capital a été réalisé par M. K.-F. Sundman, astronome à l'observatoire d'Helsingfors (Finlande). On en trouvera le développement dans les Tomes 34 et 35 des *Acta Societatis fennicæ* (17 décembre 1906 et 18 janvier 1909), dans les *Mémoires du VI^e Congrès des mathématiciens à Stockholm en* 1909 (côté ici **1911**, 129). Sur les singularités réelles dans le problèmes des trois corps; et dans les *Acta mathematica*, t. 36, 1912, p. 105.

Pour le sens qu'il faut attacher au mot de « Solution définitive du problème des trois corps » (qui pourrait faire illusion), on devra lire les importants articles :

1° De M. E. Picard. — *Revue générale des Sciences*, 15 octobre 1913 (au sujet des Mémoires de M. Sundman).

Revue scientifique du 6 décembre 1913 (L'œuvre d'Henri Poincaré, p. 707-713, avec note p. 707, affirmant que M. Sundman vient de donner une solution complète du problème des trois corps).

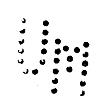
B. D., 1913, 1^re partie, p. 313-320; Le problème des trois corps, à propos des recherches récentes de M. Sundman.

2° De M. C. Nordmann (Journal *le Matin* du 16 mars 1913).

3° De M. J. Hadamard (*B. D.*, 1915, 1^re partie, p. 249-264) : Sur un Mémoire de M. Sundman.

En fait, les recherches de M. Sundman ont transformé et rénové la théorie du problème des trois corps, et le grand mérite de l'auteur est d'avoir montré que les ressources actuelles de l'Analyse permettaient, sans recourir à de nouvelles transcendantes, de poursuivre la recherche là où les géomètres avaient arrêté leurs efforts.

Note. — Dans la liste sommaire publiée ici (**1911**, 31), une déplorable confusion a été faite à l'impression entre les abréviations Cr.



et C. R. désignant respectivement le *Journal de Crelle* et les *Comptes rendus*, le lecteur y aura sans doute avisé à la seule comparaison des tomes cités et de leurs millésimes. Au surplus, aucun article en allemand n'a été inséré aux *C. R.* Les rectifications se rapportent à des études de Jacobi, Hesse et Scheibner.

Références bibliographiques diverses. — Un récent article publié dans la *Revista Matem. hisp. americ.* de Madrid 1919, sur le problème des trois corps, par M. J.-M. Plans, se termine par l'indication des derniers travaux de H. Poincaré, Sundman, Painlevé, Bisconcini, Levi-Civita, Darwin, Moulton, Whittaker et Birkhoff.

H. Brocard.

4986 (**1919**, 164) (A. Auric). — *Équations indéterminées.* — Il s'agit de résoudre les équations suivantes en nombres entiers réels positifs ou négatifs :

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} = \frac{x_1 x_2 x_3 + A^m}{y_1 y_2 y_3},$$

$$\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} + \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_1 y_2 y_3 + B^m}{x_1 x_2 x_3}.$$

Solution. — En posant

$$-A^m + iB^m = (x_1 + iy_1)(x^2 + iy_2)(x_3 + iy_3),$$

on voit immédiatement que les deux équations données se ramènent à cette relation unique.

Il suffit donc, pour trouver les solutions, de décomposer $-A^m + iB^m$ en ses facteurs premiers complexes et de prendre toutes les décompositions en trois facteurs complexes; il en résulte qu'on n'aura de véritables solutions que si $-A^m + iB^m$ possède au moins trois facteurs complexes différents ou non.

On voit également que les constantes A^m et B^m pourraient être remplacées par des nombres quelconques C et D; le système se résoudrait de la même manière.

Auric.

4991 (**1919**, 166) (A. Gérardin). — *Équations indéterminées.* — Soit l'équation

$$ab(a^2 + b^2) = 2(x^4 + y^4 + z^4).$$

Posons

$$a = m + ni,$$
$$b = m - ni,$$

il vient

$$m^4 - n^4 = x^4 + y^4 + z^4$$

et l'on est ramené au problème de trouver un bicarré égal à la somme de quatre bicarrés. AURIC.

Réponse de M. PACÉ.

4995 (**1919**, 168) (A. GÉRARDIN). — *Équation indéterminée.* — Sur se sujet, on peut citer la règle suivante :

Si A est de la forme $a^2 \pm d$, où d est un diviseur de $2a$, les solutions minima de l'équation de Fermat $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ sont

$$x = \frac{2a^2}{d} \pm 1, \qquad y = \frac{2a}{d}.$$

Ce théorème permet de calculer très rapidement les solutions d'un très grand nombre de cas.

Ainsi pour

$$a = 51,$$

on a immédiatement les solutions des équations :

$A = 2601 \pm 1$	2600, 2602
2601 ± 2	2599, 2603
2601 ± 3	2598, 2604
2601 ± 6	2595, 2607
2601 ± 17	2583, 2618
2601 ± 51	2550, 2652
2601 ± 34	2567, 2635
2601 ± 102	2499, 2703

R. DESPUJOLS.

5008 (**1920**, 4) (R. GOORMAGHTIGH). — *Sur trois coniques :*

I. *Démonstration géométrique.* — Soient Γ, G, I les coniques conjuguée, circonscrite et inscrite à un triangle ABC et tangentes entre elles en un point O, et soit OT la tangente commune.

On peut définir, d'après un théorème de Chasles, la conique G comme la limite d'une conique G_1 circonscrite au triangle ABC et à un certain triangle abc, conjugué par rapport à la conique Γ, et dont les sommets se rapprochent indéfiniment du point O, et définir la

conique I comme la polaire réciproque de G par rapport à Γ, ou comme la limite de la polaire réciproque I_1 de G_1 par rapport à Γ.

Considérons comme conique G_1 la conique circonscrite au triangle ABC, passant par le point O et tangente en O à une corde quelconque donnée OH de la conique Γ : cette conique passera par le pôle P de la corde OM par rapport à la conique Γ, pôle situé sur la tangente OT. Le triangle *abc* a pour sommets le point P et deux points infiniment voisins de O sur la droite OM. La conique G sera la limite de la conique G_1 lorsque la corde OM se rapproche indéfiniment de la tangente OT, ou, ce qui est équivalent, lorsque le point P se rapproche indéfiniment du point O.

Soit Pm la tangente en P à la conique G_1, le point m étant son point d'intersection avec OM. La conique I_1, polaire réciproque de G_1 par rapport à Γ, est tangente à OP en ρ et à OM en un point μ conjugué harmonique de M par rapport à O et M, c'est-à-dire tel que

$$(1) \qquad \frac{1}{OM} + \frac{1}{O\mu} = \frac{2}{OM}.$$

Soient maintenant γ le milieu de OM, g le milieu de $O\rho$, i le milieu de $\rho\mu$. Les droites $\rho\gamma$, mg et Oi sont des diamètres des coniques Γ, G_1 et I_1. Menons $\rho g'$ parallèle à mg, Pi' parallèle à Oi, g' et i' étant sur Om; nous aurons

$$Oi' = -O\mu, \qquad Og' = 2Om;$$

d'où, d'après (1),

$$(2) \qquad \frac{2}{Og'} - \frac{1}{Oi'} = \frac{2}{OM} = \frac{1}{O\gamma}$$

ou

$$(3) \qquad \frac{1}{O\gamma} + \frac{1}{Oi'} = \frac{2}{Og'}.$$

Si maintenant on fait tourner OM autour de O jusqu'à ce que cette corde se confonde avec la tangente OP, le point P se rapproche indéfiniment de O, et les droites Pg', Pi', $P\gamma$, qui d'après (3) forment un faisceau harmonique avec PO, tendent vers les diamètres, issus de O, des trois coniques considérées dans l'énoncé de la question, qui se trouve ainsi démontré.

L'équation (3) prouve en outre que le diamètre de la conique circonscrite est harmoniquement conjugué de la tangente commune par rapport aux diamètres des coniques inscrite et conjuguée.

Il y a une infinité de coniques tangentes à OM en O et passant par le

point P, et, étant donné un triangle quelconque $A_1 B_1 C_1$ conjugué par rapport à Γ, on peut toujours en tracer une circonscrite à ce triangle (celle qui passe par les points A_1 et B_1 passe par C_1). Deux coniques G quelconques définies par l'énoncé sont donc les limites de deux coniques G_1 qui ont trois points communs. Donc, à la limite :

« Toutes les coniques tangentes en un même point à une conique fixe, et circonscrites à un triangle conjugué à cette conique fixe, sont osculatrices entre elles. »

Même théorème pour les coniques inscrites dans ces triangles et tangentes en un même point à la conique fixe.

On peut donc, quand $\widehat{MOP} = \alpha$ devient infiniment petit, remplacer les trois coniques Γ, G, I par leurs cercles osculateurs, de rayons ρ, R, r. On a alors

(4) $$\overline{OP} = \rho \operatorname{tang}\alpha = 2R \sin\alpha = r \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2};$$

d'où, pour $\alpha = 0$,

(5) $$r = 4R = 2\rho,$$

et, comme les courbures de G et de I sont de sens contraire à celle de Γ, on en conclut que « le centre de courbure de la conique inscrite est conjugué harmonique du point de contact commun par rapport aux centres de courbure des coniques circonscrite et inscrite ».

A noter que les équations (5) donnent bien

$$Rr = \rho^2,$$

relation connue entre les rayons de courbure au point de contact commun de trois coniques G, I et Γ, dont deux, G et I, sont polaires réciproques par rapport à la troisième Γ.

Enfin, en écartant les cas de dégénérescence des coniques en couples de droites ou de points, on voit par ce qui précède que, le rapport des rayons de courbure au point de contact ne pouvant être égal qu'à 2 ou 4 :

1° « Deux coniques ne peuvent avoir entre elles un contact du second ordre si chacune d'elles est soit circonscrite, soit inscrite, soit conjuguée au même triangle. »

2° « Les coniques circonscrites à un triangle (ou inscrites) (ou conjuguées), et tangentes à l'un des cercles tritangents ou conjugué (ou conjugué, ou circonscrit) (ou circonscrit, ou tritangents), ont dans chaque cas leur rayon de courbure constant au point de contact, et le lieu des centres de courbure correspondants est un cercle concentrique au cercle considéré. »

II. *Démonstration analytique.* — Prenons comme axes des coordonnées la tangente commune et le diamètre de la conique Γ passant par le point de contact O. Les équations des coniques peuvent s'écrire :

$$\Gamma : \qquad \alpha x^2 + \gamma y^2 + 2\varepsilon y = 0,$$
$$G : A x^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey = 0,$$
$$I : a x^2 + 2b\, xy + cy^2 + 2ey = 0.$$

Nous définirons : 1° la conique I comme inscrite dans un triangle conjugué par rapport à la conique Γ; 2° la conique G comme polaire reciproque de la conique I par rapport à la conique Γ.

La condition qui exprime la relation entre I et Γ est, d'après la théorie des invariants,

$$(1) \quad 2a\varepsilon + \alpha e = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\varepsilon}{\alpha} = -\frac{e}{2a}, \qquad \text{ou} \qquad \rho = -\frac{r}{2}.$$

L'équation tangentielle de la conique G est

$$-E^2 u^2 + 2BE\, uw - 2AE\, vw + (AC - B^2) w^2 = 0$$

et celle de la polaire réciproque de I par rapport à Γ est

$$\frac{\varepsilon^2 a}{\alpha^2} u^2 + 2\frac{b\varepsilon^2}{\alpha} uw + 2e\varepsilon vw + (\varepsilon c - 2e\gamma) w^2 = 0;$$

d'où, en identifiant,

$$\frac{A}{B} = 2\frac{a}{b},$$

ce qui démontre la proposition.

La relation (1) et la relation analogue concernant la conique G démontrent les théorèmes relatifs à l'osculation des coniques et aux valeurs des rayons de courbure. A. HAARBLEICHER.

10.5
575

MAR 21 1922

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS

FONDÉ EN 1894 PAR C.-A. LAISANT ET ÉMILE LEMOINE

DIRECTEURS-RÉDACTEURS

Ed. MAILLET
Docteur ès Sciences
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées
Examinateur à l'École Polytechnique

A. BOULANGER
Directeur des Études à l'École Polytechnique

J. LEMAIRE
Professeur au Lycée Janson de Sailly
Répétiteur à l'École Polytechnique

Publication honorée d'une souscription du Ministère de l'Instruction publique

TOME XXVII. — 1920

Nos 9 et 10. — SEPTEMBRE-OCTOBRE 1920

VOIR LES AVIS DIVERS ET LA CORRESPONDANCE à la page 2 de la Couverture

PARIS
GAUTHIER-VILLARS et Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1920

SOMMAIRE DES N°s 9 ET 10.

S'adresser, pour la rédaction, à M. *Ed. Maillet*, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, 11, rue de Fontenay, Bourg-la-Reine, ou à M. *A. Boulanger*, directeur des Etudes à l'École Polytechnique, ou à M. *J. Lemaire*, professeur au Lycée Janson de Sailly, 18, rue Eugène Manuel, Paris (16e) ; pour les abonnements et les tirages à part, à MM. *Gauthier-Villars et Cie*, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Rédacteur de service : M. J. LEMAIRE.

AVIS DIVERS

QUESTIONS récentes de MM. Bickart, Despujols, Lecat, G. Lemaire, Marchay, H. Pacé, Sebban.

RÉPONSES récemment reçues de MM. L. Aubry, **4967** ; Belga, **5021**, **5022** ; Brocard, **1193**, **2424**, **3143**, **3698**, **4882**, **4883**, **4935**, **5022**, **5049**, **5051**, **5057** ; Cunningham, **5015**, **5027** ; Despujols, **4732**, **4965**, **4990**, **5036** ; Gérardin, **5036**, **5044**, **5055** ; Métrod, **179**, **5036** ; H. de Montille, **4523** ; Nagel, **4538**, **4973**, ; Pacé, **4905**, **5053** ; Sebban, **4963**.

Nous prions nos Correspondants de rappeler leur adresse dans chacun de leurs envois; de *n'écrire que sur le recto de la feuille*. Les formules doivent être écrites et les figures *faites avec le plus grand soin*, de façon qu'elles ne prêtent à aucune ambiguïté pour l'impression, particulièrement en ce qui concerne les indices, les signes, etc. En général, rien de ce qui est à imprimer ne doit être oublié, la ponctuation par exemple. La dactylographie est recommandée. Enfin, nous prions nos correspondants d'une manière tout à fait instante, de s'attacher, dans la mesure du possible, à ne pas omettre, lorsqu'ils citent un périodique, l'année de la publication, renseignement aussi important que celui de sa tomaison.

QUESTIONS.

5072. [**I18c**] Soit

$$N = k^r x^{2r} - K x^r y^r + k^r y^{2r},$$

avec $r = 2\rho$.

Trouver la forme de K = fonction de k et ρ, de telle sorte que N puisse être décomposé en ρ facteurs algébriques de même forme. (k, x, y, n'ont pas de facteur commun.)

A. Cunningham.

5073. [**I18c**] On demande des renseignements sur la proposition suivante :

La puissance $m^{\text{ième}}$ d'une somme de trois carrés est elle-même une somme de trois carrés

$$(a^2 + b^2 + c^2)^m = A^2 + B^2 + C^2 \qquad (m \text{ entier}).$$

R. de Balmont.

5074. [**I18c**] Les nombres qui sont, de *deux* façons, la somme de trois bicarrés, ont fait l'objet de nombreuses communications à l'*Intermédiaire* (Question 3427, **1908**, 193; **1909**, 83; **1910**, 279; **1911**, 205; **1912**, 132, 252; **1913**, 105, 273; **1914**, 153); la recherche des nombres qui sont, de *trois* façons, la somme de trois bicarrés, a été proposée récemment par M. Gérardin (**1919**, 129). Ceci nous amène à demander si le résultat suivant est connu :

Si n est un entier quelconque, il existe au moins une infinité de nombres qui sont, de n façons, la somme de trois bicarrés.

Ce théorème résulte de ce que *l'expression*

$$\left[\frac{(k^2-1)a-k(k+2)b}{k^2+k+1}\right]^4+\left[\frac{(2k+1)a+(k^2-1)b}{k^2+k+1}\right]^4+\left[\frac{k(k+2)a-(2k+1)b}{k^2+k+1}\right]^4$$

est indépendante de k, *et conserve, en outre, sa valeur quand on intervertit* a *et* b.

Pourrait-on, de plus, indiquer d'autres formules analogues?

On peut observer que, si l'on pose $a=(\alpha^2+\beta^2)^2$ et $b=(2\alpha\beta)^2$, on trouve que la somme des trois bicarrés vaut

$$(\alpha^2+\beta^2)^8+(2\alpha\beta)^8+(\alpha^2-\beta^2)^8;$$

on en déduit facilement des solutions entières pour l'équation

$$x^8+y^8+z^8=u^4+v^4+w^4.$$

En outre, pour $a=b$ on trouve l'identité

$$2(k^2+k+1)^4=(2k+1)^4+[k(k+2)]^4+(k^2-1)^4,$$

qui donne des solutions pour

$$2t^4=x^4+y^4+z^4.$$

R. Goormaghtigh.

5075. [**I2b** et **V9**] Édouard Lucas, dans sa *Théorie des Nombres*, mentionne que M. Le Lasseur a obtenu différentes décompositions en facteurs de $N=2^n-1$, mais il ne donne aucune indication sur les manuscrits originaux de cet auteur. Un lecteur de l'*Intermédiaire* pourrait-il me donner ces renseignements et me fournir quelques détails biographiques sur M. Le Lasseur?

Herbert Woodall (Stockport).

5076. [**I19c**] Quelle est l'équation qui, résolue en nombres entiers, fournit comme racines les deux suites de Fibonacci

$$0,\quad 1,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 5,\quad \ldots,$$
$$2,\quad 1,\quad 3,\quad 4,\quad 7,\quad 11,\quad \ldots?$$

J. Pacé.

5077. [**U**] D'après les bases posées dans le *Talmud* de Jérusalem, exposées dans l'excellente Notice que Terquem a publiée à ce sujet dans le 3e volume de la *Bible de Cahen*, l'année israélite peut avoir six durées différentes : 353, 354, 355, 383, 384, 385 jours, et six seules.

Le cycle israélite, qui se compose de 19 années solaires, est réparti sur 235 lunaisons moyennes.

Je demande quelle est la plus petite valeur de n, pour laquelle l'année israélite recommence le même jour, après n cycles de 19 années solaires.

La valeur pratique de cette question est de permettre de dresser un calendrier israélite perpétuel.

Henri Sebban.

5078. [**K2e**] Étant donnés deux triangles dans le même plan, il y a six points qui admettent la même polaire trilinéaire par rapport à ces deux triangles. Quand les deux triangles sont inscrits dans une même conique, ces six points sont trois à trois en ligne droite. Comment sont-ils disposés dans le cas général? Quand sont-ils sur une même conique?

L. Bickart.

5079. [**K4**] Déterminer un triangle connaissant les polaires de trois points donnés par rapport à ce triangle. Il y a six solutions; peut-on énoncer quelques relations entre elles? L. Bickart.

5080. [**K18g**] Si l'on choisit un point arbitrairement sur chaque arête d'un tétraèdre, les quatre sphères passant respectivement par chaque sommet et par les points situés sur les trois arêtes adjacentes ont un point commun K (S. Roberts, *Mathesis*, 1881, p. 95). Si par les sommets du tétraèdre on trace quatre droites parallèles qui percent respectivement la sphère correspondante en α, β, γ, δ, ces points sont-ils situés dans un plan passant en K?

La proposition corrélative dans le plan est connue.

V. Thébault.

5081. [**C1a** et **V**] *L'encyclopédie franco-allemande des Sciences mathématiques* donne la définition suivante de la différentielle d'une fonction d'une variable réelle : « La différentielle d'une fonction $y = f(x)$ est le produit de la dérivée $f'(x)$ de cette fonction par une quantité finie arbitraire Δx » et l'attribue à Cauchy (t. **2**, vol. 1, fasc. **2**, p. 276). Cela ne nous semble pas exact.

Non seulement Cauchy n'adopte pas cette définition, mais il la condamne en termes explicites; parce qu'elle oblige à faire choix de la variable indépendante et parce qu'elle ne s'applique pas au cas où l'on a plusieurs fonctions de plusieurs variables. Il fait observer de plus qu'elle lui est antérieure. (*Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. 3, p. 7 et 8; Paris 1844).

Cauchy est-il revenu plus tard sur cette question et a-t-il modifié son opinion? F. BALITRAND.

5082. [**I24b**] J'ai calculé en 1902 la valeur de π avec 200 chiffres par la formule de Machin. Le détail du calcul a été envoyé à l'Académie des Sciences de Paris en 1907 (*Comptes rendus*, t. **146**, janvier 1908). Voici la valeur que j'ai obtenue :

$\pi =$ 3,141592	653589	793238
462643	383279	502884
197169	399375	105820
974944	592307	816406
286208	998628	034825
342117	067982	148086
513282	306647	093844
609550	582231	725359
408128	481117	450284
102701	938521	105559
644622	948954	930381
96		

Bien que j'aie pleine confiance dans l'exactitude de ce résultat, le calcul étant vérifié par diverses méthodes, je voudrais comparer cette valeur avec celles obtenues par d'autres calculateurs. Aussi, je prie un des correspondants près des

grandes bibliothèques de bien vouloir faire cette comparaison ou de m'indiquer un livre facile à trouver donnant la valeur de π avec deux cents, ou plus, décimales.

Nota. — Je connais les valeurs de Lagny avec 127 chiffres et de Véga avec 140. J'ai appris que le calcul de Shanks avec 700 décimales est cité dans les *Proceedings of the London Royal Society*, t. 22, mais je ne sais pas si l'on y trouve publié le résultat, car je n'ai pas vérifié cette citation.

F.-J. Duarte (Berne).

5083. [**V1**] Les Sciences mathématiques ont pris un immense développement. Il est presque impossible à un savant, quelque bien doué qu'il soit, d'en connaître toutes les parties. Des théories nouvelles sont édifiées et leurs auteurs sont amenés à créer des mots nouveaux ou à utiliser dans un sens nouveau des mots anciens pour faciliter l'exposé de leurs idées.

Il ne suffit plus de connaître les travaux classiques pour pouvoir lire des mémoires où les néologismes abondent; aussi à diverses reprises on a signalé les avantages que présenterait la publication d'un dictionnaire donnant la définition des mots techniques et rien que leur définition.

Il faudrait commencer par élaborer un programme précisant les limites dans lesquelles on devrait se renfermer pour chaque nature de mots de façon à éviter les omissions et les doubles emplois, et les indications superflues. Pour les courbes qui ont reçu un nom il suffirait, par exemple, de faire connaître un de leurs modes de génération, leur équation en coordonnées polaires ou cartésiennes et, le cas échéant, leur synonymie.

Pour les mots à sens multiples comme : ensemble parfait, mesure d'un ensemble, il conviendrait de préciser leurs diverses définitions, en faisant suivre chacune d'elles du nom du mathématicien qui l'a fait adopter.

Deux objections sont à prévoir :

Un travail aussi considérable ne peut être rapidement réalisé qu'avec le concours de nombreux collaborateurs;

beaucoup d'érudits sont certainement à même de se charger de la définition des termes classiques; mais il en est autrement pour ce que l'on pourrait, appeler les extensions des mathématiques. Seuls, les spécialistes de ces théories, créateurs, continuateurs ou commentateurs, pourraient donner des définitions précises et exactes.

La crise qui sévit dans la librairie soulève la seconde objection. Les prix de composition, de papier, de brochage sont si élevés que l'on ne peut songer à une publication immédiate; mais de longs délais seront imposés par la préparation du manuscrit et, puisque la baisse s'accentue dans la plupart des industries, il n'y a pas de raison pour qu'il n'en soit pas bientôt de même chez les imprimeurs, fabricants de papier, etc.

Une notice pourrait être publiée ou encartée dans des revues mathématiques, demandant à ceux que la question intéresserait de donner leur adhésion et de dire s'ils seraient disposés à collaborer à la préparation du dictionnaire.

Pour répondre à un besoin scientifique, on ne doit pas se laisser effrayer par des difficultés dont on s'exagère certainement l'importance. Il faut sans crainte aller de l'avant, *Audentes Fortuna Juvat.* P. Worms de Romilly.

5084. [**H10d**] Le problème plan intérieur de Neumann consiste à déterminer, à une constante près, une fonction harmonique à l'intérieur d'un contour et dont la dérivée normale prend sur le contour une série de valeurs données. Je désire savoir où se trouve bien exposée sa solution, tant au point de vue de l'existence que du calcul numérique, dans le cas des contours formés par deux courbes fermées indépendantes, le domaine intérieur étant l'anneau de forme quelconque restant entre les deux courbes.

Autrement dit, je désire connaître sa solution dans le cas des domaines doublement connexes.

M. Velasco de Pando (Séville, Espagne).

RÉPONSES.

2040 (**1901**, 59) (H. Brocard). — *Applications de la formule*

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

(**1901**, 268; **1902**, 22). — Il est certain que, dans les classes élémentaires, on ne se doute pas du but ni de l'opportunité d'une étude des variations d'une forme dont on dissimule le degré et dont bien des mathématiciens ignorent même les applications possibles, immédiates ou éloignées.

Il sera donc utile de signaler une étude particulièrement développée que vient de publier à ce sujet M. C. Cailler dans l'*Enseignement mathématique* (1919, p. 317-337), *Sur une transformation élémentaire et sur quelques intégrales définies et indéfinies.*

L'auteur énumère, en effet, des applications demeurées pour ainsi dire insoupçonnées, telles que le principe, « en Géométrie, de l'involution de quatre points, qui joue encore un rôle essentiel dans nombre de problèmes d'Analyse; parmi ceux-ci on peut citer l'intégration des irrationnelles du second degré, la réduction des intégrales elliptiques à la forme normale de Legendre, l'abaissement au type elliptique de certaines catégories d'intégrales abéliennes ».

Il y a soixante ans la formule ci-dessus, indiquée aux Programmes, était enseignée sans graphique et sans la moindre application à quelque problème. C'est dire combien ce sujet paraissait rebutant, difficile à saisir et peu intéressant.

En réalité, on se proposait d'étudier des maxima et des minima pour la détermination desquels il eût bien mieux valu initier de suite à la notion élémentaire des dérivées, au lieu de la renvoyer à quelques années plus tard. H. Brocard.

2258 (**1902**, 4) (G. de Rocquigny) (**1919**, 175). — *Décomposition*

d'une sixième puissance en une somme de trois hexagones et d'un triangle de rang pair.

Réponse de M. Pacé qui conclut à l'impossibilité de la question dans les termes où elle est posée.

3288 (**1907**, 220). — *Trinitario*). — *Point éclairé dans l'ombre* (**1908**, 149; **1909**, 16). — Après une réponse conjecturale (**1908**, 149), j'ai donné (**1909**, 16) le renseignement précis, tiré des Œuvres de Fresnel. Je n'ai rien à y changer, mais je suis très aise de rappeler que l'expérience a été prévue par Poisson, comme conséquence de l'analyse de Fresnel.

Voici un témoignage des plus intéressants, que je tire d'un article de M. Bouty, au Tome 1 de la *Science française à l'Exposition universelle de San-Francisco*, p. 136 :

« La théorie de l'émission se heurtait aux phénomènes de diffraction dont elle n'avait pu fournir une interprétation satisfaisante. L'Académie française des Sciences proposa cette question à la sagacité des jeunes savants, prescrivant d'ailleurs de faire usage de la théorie de l'émission. Un inconnu, nommé Fresnel, bien qu'à peu près dénué des ressources indispensables à une expérimentation délicate, a l'audace et le bonheur de résoudre la question proposée de la manière la plus complète, mais son application repose sur la théorie des ondulations. Poisson, l'un des commissaires de l'Académie, observe que les théories de l'auteur entraînent cette conséquence paradoxale, non explicitée par Fresnel, que le centre de l'ombre géométrique d'un petit disque opaque doit se trouver éclairé. Contre toute vraisemblance, l'expérience, tentée de suite, donne le résultat prédit. Le prix fut décerné à Fresnel. »

Je crois que ce point d'histoire de la Physique française méritait d'être précisé. H. Brocard.

3474 (**1908**, 272) (G. Hitrovo). — *Un horoscope attribué à Euler* (**1919**, 178; **1920**, 44). — Dans l'éloge d'Euler, prononcé par Condorcet en sa qualité de secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, on trouve le passage suivant :

« Son érudition était très étendue, surtout dans l'histoire des Mathématiques. On a prétendu qu'il avait porté sa curiosité jusqu'à s'instruire des procédés et des règles de l'Astrologie, et que même il en avait fait quelques applications. Cependant, lorsqu'en 1740 on lui

donna ordre de faire l'horoscope du prince Yvan, il représenta que cette fonction appartenait à M. Kraaf, qui, en qualité d'astronome de la Cour, fut obligé de la remplir. » F. Balitrand.

4165 (**1913**, 6) (L. Aubry). — *Composition des formes quadratiques.*

Les deux formes quadratiques

$$(md, b, nd) \quad \text{et} \quad (nd, b, md)$$

sont improprement équivalentes, mais ne sont pas de *même classe*, car on ne transforme pas l'une ou l'autre au moyen d'une substitution modulaire, sauf cependant si $b = 0$. ou bien si $m = n$, ou encore si $2b$ est divisible par md.

(*Voir* Gauss, *Recherches arithmétiques*, nos 153, 159, 172, 175.)

G. Métrod.

4188 (**1913**, 74) (H. Brocard). — *Lieu* (M) *des points d'intersection* M *des tangentes menées de deux points fixes* A, B *à un cercle de rayon constant dont le centre* C *décrit une courbe* (C) (**1914**, 39, 112). — On n'a pas considéré jusqu'ici les propriétés infinitésimales du lieu étudié; la construction de la normale en un point de la courbe (M) est cependant très simple :

Soient α, β *les intersections de la normale à* (C) *en* C *avec les perpendiculaires élevées en* A *et* B *sur* AM *et* BM; *la perpendiculaire élevée sur* AM *au point qui divise* AM *comme* β *divise* Cα *coupe* Bβ *en un point de la normale cherchée.*

R. Goormaghtigh.

4810 (**1918**, 7) (H. Brocard). — *Canons de Barisal.* — Aux environs de la ville de Barisal (golfe de Bengale, à l'est de Calcutta) on entend fréquemment, pendant la marée montante, des bruits analogues au bruit du canon; ce phénomène, auquel on donne le nom de *Barisalguns*, a d'ailleurs été observé en de nombreux endroits, notamment sur le littoral de la Belgique et de la Hollande, où l'on désigne généralement ces bruits sous le nom de *mistpoeffers* (en allemand *nebelknalle*).

Les indications bibliographiques suivantes pourront être utiles pour étudier la valeur relative des explications proposées :

A. Flamache, *Sur les mistpoeffers* (*Soc. astron. Bruxelles*, 1902, p. 47-49);

E. Lagrange, *La question des mistpoeffers* (*Ciel et Terre*, Bruxelles, 1907, p. 40-42);

R. Lütgens, *Die Erklärung der Mistpoeffers oder Nebelknalle* (*Ann. hydrograph.*, Berlin, 1908, p. 87-88);

B. Lotti, *Contributo allo studio dei mistpoeffers* (*Roma, Boll. Comitato geol.*, 1908, p. 293-300);

J. Wodetzky, *Ueber den Nebelhknall* (*Naturwiss. Mitteil.*, Budapest; 1909, p. 641-644);

Encyclopaedia Britannica (Cambridge, 1910, vol. III, p. 401, article *Barisal*).

On pourra également consulter les publications annuelles du *Nederlandsch meteorologisch Instituut : onweders, optische verschijnselen, mistpuffers in Nederland* (Utrecht).

Au sujet de la perception du son à des distances variables, *voir* :

W. Marriott, *Audibility of « Big Ben » at West Norwood under certain meteorological conditions* (*Quart. J. Roy. Met. Soc.*, London, 1894, p. 243);

J. Bacon, *On the capricious hearing of certain sounds at long range* (*Knowledge*, London, 1901, p. 193-194);

M. Ebell, *Akustische Meteorologie* (*Met. Zeits.*, Vienne, 1903, p. 571-572);

J. Bacon, *Upper air currents and their relation to the audibility of sound* (*Rep. Brit. Ass.*, London, 1904). R. Goormaghtigh.

4843 (**1918**, 74) (M. Servant). — *Problème de l'aiguille sur un réseau quadrillé* (**1920**, 50). — Le jour même de l'arrivée des cahiers 3-4 de 1920 de l'*Intermédiaire*, j'ai reçu les cahiers 4-5 du *Bulletin des Sc. math.*, renfermant (p 126-136) un important article de M. B. Hostinsky *Sur une nouvelle solution du problème de l'aiguille*, où il signale que la solution donnée jusqu'alors avait besoin de rectifications qu'il vient d'exposer d'après des idées de E. Carvallo et de H. Poincaré.

L'auteur en tire une conséquence négative en ce qui concerne la détermination expérimentale du nombre π, par laquelle on a volontiers popularisé le problème de l'aiguille de Buffon.

H. Brocard.

4846 (**1918**, 74) (H. Brocard). — *Démonstrations du théorème de Pythagore* (**1919**, 23). — Une collection de « démonstrations anciennes et récentes du théorème de Pythagore », renfermant

100 démonstrations, a été publiée par Benjamin F. Yanney et James A. Calderhead dans le *American mathematical monthly*, vol. III, nos 3, 4, 6-7, 12; vol. IV, nos 1, 3, 6-7, 10, 11; vol. V, no 3; vol. VI, nos 2, 3), 1896-1899. FLORIAN CAJORI.

4890 (**1919**, 4) (F. BALITRAND). — *Relations entre les arcs de la podaire centrale de l'ellipse correspondant à des arcs associés.*— A. Soient $M(x, y)$ un point d'une ellipse E, et $P(X, Y)$ le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente en M; les relations

$$x = \frac{a^2 X}{X^2 + Y^2}, \qquad y = \frac{b^2 Y}{X^2 + Y^2}$$

nous donnent l'équation de la podaire centrale

$$(1) \qquad (X^2 + Y^2)^2 - (a^2 X^2 + b^2 Y^2) = 0.$$

On voit que, si nous considérons le point M'

$$x' = \frac{b}{a} x = \frac{ab X}{X^2 + Y^2}, \qquad y' = \frac{a}{b} y = \frac{ab Y}{X^2 + Y^2},$$

dont le lieu est l'ellipse E'

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1,$$

la podaire est la courbe inverse de E' par rapport à l'origine, la puissance d'inversion étant ab.

Considérons maintenant sur l'ellipse deux points M_1 et M_2 où les arcs soient associés au sens de Chasles, et soient P_1 et P_2 les deux points correspondants de la podaire. On sait que l'on a les relations suivantes, qui remontent à Fagnano :

$$(2) \qquad M_1 P_1 = M_2 P_2, \qquad \overline{OP_1}.\overline{OP_2} = ab, \qquad \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = \frac{b^3}{a^3}.$$

Pour les points correspondants de l'ellipse E' et de la podaire, on aura par conséquent

$$(3) \quad \overline{OM'_1}.\overline{OM'_2} = \frac{ab}{OP_1} \frac{ab}{OP_2} = ab, \qquad \frac{y'_1 y'_2}{x'_1 x'_2} = \frac{Y_1 Y_2}{X_1 X_2} = \frac{a^4 b^3}{b^4 a^3} = \frac{a}{b}.$$

D'autre part, l'arc s' de l'ellipse E' et l'arc S de la podaire centrale

sont liés par la relation d'inversion

$$\frac{dS}{ds'} = \frac{OP}{OM'}$$

et par conséquent les arcs s'_1, s'_2, S_1 et S_2 correspondant à des arcs associés sur E satisfont à la condition

$$dS_1\, dS_2 = \frac{OP_1\, OP_2}{OM'_1\, OM'_2}\, ds'_1\, ds'_2 = ds'_1\, ds'_2.$$

B. Cherchons une expression de dS. Les coordonnées polaires ρ et α de la podaire sont liées par la relation déduite de (1)

$$\rho^2 = a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2\alpha,$$

et si nous posons

$$t = \operatorname{tang}^2\alpha, \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{1+t}, \qquad \sin^2\alpha = \frac{t}{1+t},$$

$$d\alpha^2 = \frac{dt^2}{4t(1+t)^2},$$

nous aurons d'abord

$$\rho^2 = \frac{a^2 + b^2 t}{1+t}, \qquad d\rho^2 = \frac{c^4\, dt^2}{4(a^2 + b^2 t)(1+t)^3},$$

et finalement

$$dS = \sqrt{\rho^2\, d\alpha^2 + d\rho^2} = \frac{1}{2(1+t)} \sqrt{\frac{a^4 + b^4 t}{t(a^2 + b^2 t)}}\, dt.$$

L'arc S de la podaire s'exprime donc par une intégrale elliptique.

Pour associer des arcs sur la podaire, il faut poser

$$\frac{1}{(1+t)^2}\, \frac{a^4 + b^4 t}{t(a^2 + b^2 t)} = \left[\frac{u(t)}{v(t)}\right]^2.$$

Cette équation donnera les valeurs de t correspondant aux points associés. L'intégrale S étant de genre *un*, on peut déterminer u et v de façon à avoir m points associés liés par $m - 1$ relations. Pour des valeurs particulières de u et v, l'équation précédente pourra donc n'avoir que deux racines liées par une seule condition. Ce choix peut se faire d'une infinité de manières, mais il ne semble pas que l'on puisse arriver à obtenir que cette condition soit précisément

$$t_1 t_2 = \frac{a^2}{b^2},$$

comme il le faudrait d'après les relations (3) pour que les points P_1 et P_2 correspondissent à des points associés sur E.

C. Par contre, nous obtiendrons un résultat intéressant en posant

$$\frac{u}{v} = \frac{\lambda}{(1+t)(a^2+b^2t)},$$

d'où l'équation donnant les valeurs de t

$$(1+t)^2(a^2+b^2t)[(a^4+b^4t)(a^2+b^2t)-\lambda^2 t] = 0.$$

Les deux racines variables t_1 et t_2 satisfont aux relations

$$t_1+t_2 = \frac{\lambda^2 - a^2b^2(a^2+b^2)}{b^6}, \qquad t_1 t_2 = \frac{a^6}{b^6}.$$

La dernière correspond à

$$\frac{Y_1 Y_2}{X_1 X_2} = \frac{y'_1 y'_2}{x'_1 x'_2} = \pm \frac{a^3}{b^3}.$$

En la comparant aux équations (2) et (3), on voit que les arcs ainsi associés sur la podaire correspondent *à des arcs associés sur l'ellipse* E' et non *à des arcs associés sur l'ellipse* E.

Toutefois, si $a^2 = -b^2$, comme c'est le cas pour l'hyperbole équilatère, les trois associations ont lieu simultanément.

Pour terminer, cherchons la valeur, que nous savons algébrico-logarithmique, de la somme S_1+S_2 [1].

En suivant la méthode que j'ai indiquée dans l'*Essai de Linéométrie* (Gauthier-Villars, 1913), page 52, nous aurons

$$4d(S_1+S_2) = \sum \frac{u}{v}\,dt,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les racines de $g=0$

$$g = (a^4+b^4t)(a^2+b^2t) - \lambda^2 t.$$

Or, pour les deux points satisfaisant à cette équation

$$g'_t\,dt - 2t\lambda\,d\lambda = 0,$$

---

[1] Si l'on ne considère que des points dans un même quadrant, tout se passe comme si S_1 était compté en sens inverse de S_2.

et par suite

$$2d(S_1+S_2=\sum \frac{t\lambda^2\,d\lambda}{(1+t)(a^2+b^2t)g'},$$

c'est-à-dire en remplaçant λ^2 par sa valeur en fonction de t

$$2d(S_1+S_2)=\sum \frac{a^4+b^4t}{(1+t)g'}d\lambda = d\lambda\left[\sum \frac{b^4}{g'}+\sum \frac{a^4-b^4}{(1+t)g'}\right].$$

Or on a (*loc. cit.*, p. 41)

$$\sum \frac{1}{g'}=0,$$

$$\sum \frac{1}{(1+t)g'}=-\frac{1}{g(-1)}=-\frac{1}{\lambda^2+(a^4-b^4)(a^2-b^2)},$$

et, après le changement indiqué,

$$\lambda^2=(a^4-b^4)(a^2-b^2)\mu^2,$$

on trouve finalement, avec un double signe,

$$2(S_1+S_2)=\sqrt{a^2+b^2}\int \frac{d\mu}{1+\mu^2}=\sqrt{a^2+b^2}\,\text{arc tang}\,\mu.$$

L'interprétation de μ est d'ailleurs facile,

$$\mu^2=\frac{a^4+b^4t}{a^4-b^4}\,\frac{a^2+b^2t}{a^2-b^2}\cdot\frac{1}{t}=\frac{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}{(a^4-b^4)(a^2-b^2)}\left(\frac{a^4}{\sin^2\alpha}+\frac{b^4}{\cos^2\alpha}\right).$$

Pour voir ce que représente la dernière parenthèse, appelons P′ le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente à l'ellipse E′ en M′ (P′ se trouve d'ailleurs sur OM). On trouve

$$\frac{c^4}{\overline{M'P'}^2}=\frac{a^4}{y'^2}+\frac{b^4}{x'^2}=\left(\frac{a^4}{\sin^2\alpha}+\frac{b^4}{\cos^2\alpha}\right)\frac{1}{\overline{OM'}^2}$$

et finalement

$$\mu=\frac{\overline{OP}\,\overline{OM'}\,c}{(a^2+b^2)\,\overline{M'P'}}=\frac{abc}{(a^2+b^2)\,\overline{M'P'}}.$$

On retrouve l'égalité

$$M'_1P'_1=M'_2P'_2,$$

qui confirme que les points M'_1 et M'_2 sont bien associés sur E′.

J. SER.

4905 (**1919**, 35) (A. Colucci). — *Équation de Fermat* (**1919**, 125; **1920**, 16). — Comme *addition à ma précédente réponse* (**1920**, 16), je puis indiquer que les nombres N dont la racine carrée se développe en fraction continue à période de cinq termes ont pour expression générale

$$N = A^2 + B^2,$$

$$A = 2am(ab+1) + ab^3 + ab + 1,$$

$$B = m[a^2(b^2-1) + 2ab + 1] + \frac{a(b^4-1) + b^3 + 3b}{2},$$

dans laquelle

b est un entier positif quelconque;
a est un entier positif : quelconque lorsque b est impair, pair lorsque b l'est aussi;
m un entier quelconque, positif ou négatif, mais rendant A et B positifs.

La période du développement de $\sqrt{N}$ est

$$a, \quad b, \quad b, \quad a; \quad 2n;$$

n est la racine carrée de N à une unité près par défaut, et l'on a

$$n = m[a^2(b^2+1) + 2ab + 1] + \frac{a(b^2+1)^2 + b(b^2+1)}{2},$$

$$N - n^2 = 2m(ab^2 + a + b) + (b^2+1)^2.$$

P. Poulet.

4910 (**1919**, 37) (F. Balitrand) (**1919**, 127). — *Cours de Chasles à l'École Polytechnique.* — Le renseignement donné par l'*Annuaire* de 1914, et d'ailleurs aussi par celui de 1919, est certainement exact, car il figure sur le mur de l'amphithéâtre annexe de l'École, où ont lieu les cours d'Analyse :

Savary........................	1830-1841
Navier........................	1831-1832
Mathieu........................	1833-1838
Liouville........................	1839-1850
Chasles........................	1842-1850
Duhamel........................	1851-1868
Sturm........................	1851-1855
....	....

C'est donc bien à Savary que Chasles a succédé dans le cours d'Analyse.

Dans le Catalogue n° 70, de juin 1920, de la Librairie scientifique Émile Blanchard, je lis à la page 11 :

Chasles, Cours d'Astronomie et de Géodésie professé à l'École Polytechnique en 1850 (1 vol. in-4°, autographié)...........

Chasles, Cours de Machines professé à l'École Polytechnique en 1842-1843 (1 vol. in-4, autographié)....................

Il semble donc que Chasles ait professé, successivement ou simultanément, les cours d'Analyse, de Machines, et d'Astronomie et Géodésie, tout au moins comme suppléant en ce qui concerne ces trois derniers.

En somme, la question posée reste entière. P. HENDLÉ.

4916 (**1919**, 38, 156) } (G. BOULLOUD).
4932 (**1919**, 72) }

5040 (**1920**, 39) (G. MÉTROD).

Construction de polyèdres. — *Voir* à ce sujet :

Éléments de Géométrie de Legendre, Note VIII;

Traité de Géométrie de Rouché et Comberousse (1912), n^{os} 688 à 704, et 904 à 929;

Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire, de Catalan, Livre VI, théorèmes III à XII.

Dans ce dernier Ouvrage, le théorème VI complète la formule d'Euler ($F + S = A + 2$) par les inégalités

$$\frac{1}{2}F + 2 \leqq S \leqq 2(F - 2),$$
$$\frac{3}{2}F \qquad \leqq A \leqq 3(F - 2),$$

qui montrent que l'on ne peut pas choisir arbitrairement trois nombres F, S, A, satisfaisant à la formule d'Euler. P. HENDLÉ.

4932 (**1919**, 72) (G. BOULLOUD). — *Relations concernant les polyèdres.* — Une première étude semble pouvoir être fondée sur la statistique des éléments S, F, A (S, sommets; F, faces; A, arêtes) des polyèdres réguliers convexes, les cinq classiques et les quatre étoilés, d'après Euler, Poinsot, Cauchy, Bertrand, Kœnigs, etc.

Voir la *Géométrie* de Rouché.

Mais le choix de la valeur initiale de F, par exemple, est très limité, non moins que celui de la valeur de S à lui associer, de sorte que le cadre étroit des possibilités ne paraît permettre d'y ajouter aucun nouvel élément.

Il faut donc vraisemblablement s'en tenir aux nombres du Tableau susmentionné (*loc. cit.*).

Comme la question vise quelque fonction d'une des quantités S, F, A, il y aura utilité à rappeler que cette fonction existe pour l'expression du nombre D de diagonales du polyèdre. Voir, en effet, *Nouvelles Annales*, p. 77-79, E. Prouhet, avec indication d'une étude de H. Binder (*Arch. de Grunert*, t. VIII, 1849, p. 221).

H. BROCARD.

4948 (**1919**, 99) (H. BROCARD) (**1920**, 24). — *Sur la perspective aérienne.* — Voir le *Traité de perspective où sont contenus les fondements de la peinture*, par le R. P. Bernard Lamy, prêtre de l'Oratoire (Amsterdam, chez Pierre Mortier, 1734).

Chapitre VIII, page 136 :

... « Ces peintres comprennent, sous le nom de *perspective aérienne*, toute la science qui est nécessaire pour faire que, par une suite successive des teintes, les objets semblent fuir ou avancer. »

P. HENDLÉ.

4968 (**1919**, 129) (A. GÉRARDIN). — *Nombres qui sont, de trois façons, la somme de trois bicarrés.* — L'identité suivante donne une double infinité de solutions :

$$\begin{aligned}[(k^2+k+1)a]^4+[(k^2+k+1)b]^4+[(k^2+k+1)(a-b]^4\\ =[(k^2-1)a-k(k+2)b]^4+[(2k+1)a+(k^2-1)b]^4\\ +[k(k+2)a-(2k+1)b]^4\\ =[(k^2-1)b-k(k+2)a]^4+[(2k+1)b+(k^2-1)a]^4\\ +[k(k+2)b-(2k+1)a]^4.\end{aligned}$$

Pour $k=2$, $a=1$, $b=-3$, on a

$$811538=7^4+21^4+28^4=4^4+23^4+27^4=12^4+17^4+29^4;$$

l'exemple cité par M. Gérardin correspond à $k=3$, $a=-1$, $b=2$.

R. GOORMAGHTIGH.

4972 (**1919**, 131) (A. GÉRARDIN). — *Mise des nombres* x^8-y^8

sous la forme $(a^4+b^4)-(c^4+d^4)$. — L'identité suivante, qui est peut-être nouvelle, pourra être très utile pour l'étude de la question :

$$\begin{aligned}x^8-y^8 = &\left[\frac{(k^2+k+1)x^2\pm(2k+1)y^2}{k^2-1}\right]^4\\ &+\left[\frac{(k^2+k+1)x^2\pm k(k+2)y^2}{k^2-1}\right]^4\\ &-\left[\frac{k(k+2)x^2\pm(k^2+k+1)y^2}{k^2-1}\right]^4\\ &-\left[\frac{(2k+1)x^2\pm(k^2+k+1)y^2}{k^2-1}\right]^4;\end{aligned}$$

dans le cas où l'on prend les signes supérieurs, les crochets seront des entiers quand kx^2+y^2 est divisible par k^2-1; dans l'autre cas, il faudra que kx^2-y^2 soit multiple de k^2-1.

Ainsi, lorsque x et y sont tous deux multiples de 3 ou tous deux non multiples de 3, on aura l'identité suivante, en entiers,

$$\begin{aligned}x^8-y^8 = &\left[\frac{1}{3}(7x^2+5y^2)\right]^4+\left[\frac{1}{3}(7x^2+8y^2)\right]^4\\ &-\left[\frac{1}{3}(5x^2+7y^2)\right]^4-\left[\frac{1}{3}(8x^2+7y^2)\right]^4;\end{aligned}$$

si x et y sont tous deux divisibles par 3, on pourra aussi employer la formule correspondante avec les signes inférieurs.

On trouvera facilement, à titre d'exemples,

$$\begin{aligned}2^8-1^8 &= (11^4+12^4)-(9^4+13^4),\\ 5^8-1^8 &= (60^4+61^4)-(44^4+69^4),\\ 5^8-2^8 &= (65^4+69^4)-(51^4+76^4),\\ 6^8-3^8 &= (60^4+69^4)-(39^4+75^4),\\ 6^8-3^8 &= (99^4+108^4)-(81^4+117^4).\end{aligned}$$

De la même manière, en particularisant la formule fondamentale indiquée ci-dessus, on obtient une infinité d'identités en entiers; citons encore celle-ci :

$$\begin{aligned}x^8-y^8 = &\left[\frac{1}{8}(13x^2-7y^2)\right]^4+\left[\frac{1}{8}(13x^2-15y^2)\right]^4\\ &-\left[\frac{1}{8}(15x^2-13y^2)\right]^4-\left[\frac{1}{8}(7x^2-13y^2)\right]^4,\end{aligned}$$

où x et y pourront être deux nombres impairement pairs; par

exemple

$$6^8 - 2^8 = (51^4 + 55^4) - (25^4 + 61^4).$$

R. Goormaghtigh.

5000 (**1919**, 170) (A. Gérardin). — *Propriété de certains couples de nombres.* — Soient N un nombre, n la somme de ses chiffres. On demande à son tour que n^p ait N pour somme Σ de ses chiffres.

A l'exemple de l'énoncé

$$N = 38, \qquad n = 11, \qquad 11^7 \text{ avec } \Sigma = 38,$$

on peut ajouter assez rapidement les suivants :

$$N = 23, \qquad n = 5, \qquad 5^7 \text{ avec } \Sigma = 23,$$
$$N = 25, \qquad n = 7, \qquad 7^7 \text{ avec } \Sigma = 25,$$
$$N = 35, \qquad n = 8, \qquad 8^9 \text{ avec } \Sigma = 35,$$
$$N = 45, \qquad n = 9, \qquad 9^7 \text{ avec } \Sigma = 45.$$

Ces résultats presque immédiats permettent d'affirmer l'existence d'une infinité de solutions, mais la recherche en est promptement arrêtée par l'exiguïté des Tables de puissances, et il convient aussi d'observer que le problème est manifestement impossible pour certaines classes de nombres N, par exemple ceux qui ont leur somme de chiffres égale à 10.

Une autre difficulté se présentera pour les nombres N dont la somme n des chiffres est 20, 30, ..., 90 : c'est de rencontrer des puissances de 2, 3, ..., 9 qui aient N pour somme de leurs chiffres. Cela n'arrivera pas nécessairement.

H. Brocard.

Autre réponse de M. Sebban.

5002 (**1920**, 2) (L. Bickart). — *Normales communes à deux paraboles.* — Si les deux paraboles ne sont pas données, et que l'on connaisse seulement quatre de leurs cinq normales communes, la recherche de la cinquième comporte 528 solutions.

Il y a, en effet, 33 paraboles admettant quatre normales données (*I. M.*, 1899, p. 141, question **1398**). En les considérant deux à deux, on a bien $\frac{33 \times 32}{2} = 528$ cinquièmes normales communes.

Si au contraire les deux paraboles sont données en même temps que quatre normales communes, en transformant leurs développées par polaires réciproques, on aura deux cubiques ayant même point de rebroussement avec des tangentes données, courbes dont on aura à chercher le neuvième point commun. C'est un cas particulier du problème général connu (*I. M.*, 1919, p. 10, question 2087).

Enfin, il y a neuf coniques admettant trois tangentes et deux normales données (*I. M.*, 1899, p. 141, *loc. cit.*). Donc, si l'on connaît le foyer commun à deux paraboles et deux de leurs normales communes, la troisième est déterminée et pourra occuper $\frac{9 \times 8}{2} = 36$ positions différentes.

P. HENDLÉ.

5005 et 5006 (**1920**, 3) (P. MOREL). — *Lieu du point de contact des tangentes menées d'un point donné aux cubiques répondant à huit conditions.* — Étant donné un système de cubiques répondant à huit conditions, s'il en passe μ par un point et qu'il y en ait ν qui touchent une droite, le lieu des points de conctact des tangentes issues d'un point fixe est une courbe d'ordre $\mu + \nu$; le point donné y est multiple d'ordre μ, et elle passe par tous les points doubles du système.

Or, pour un système de cubiques tangentes à p droites fixes et passant par $8 - p$ points, on a en général $\mu = 4^p$, $\nu = 4^{p+1}$. Le lieu envisagé sera alors d'ordre 5×4^p.

D'autre part, la connaissance d'un point double, sans celle de ses tangentes, équivaut à celle de trois points simples.

Donc :

1° Pour le système de cubiques dont on donne le point double, deux points et trois tangentes, l'ordre du lieu en question est $5 \times 4^3 = 320$;

2° Pour le système de cubiques dont on donne quatre points et quatre tangentes, cet ordre est égal à $5 \times 4^4 = 1280$.

P. HENDLÉ.

5009 (**1920**, 4) (R. DESPUJOLS). — *Construction d'un triangle, connaissant les pieds de trois bissectrices.* — Problème déjà proposé ici :

1° Sous le n° 268 (**1894**, 149) (C. Bioche). *Voir* les réponses **1898**, 33 (G. Ricalde), et **1899**, 55 (P. Barbarin).

2° Sous le n° 245, (**1902**, 265) (F. Godey). *Voir* la réponse **1903**, 64 (P. Barbarin, H. Brocard, N. Plakhowo, J.-J. Duran-Loriga).

D'après ces références, on peut conclure à une réponse complète (*loc. cit.*, **1859**, 55-58; P. Barbarin). H. BROCARD.

Même réponse de M. P. HENDLÉ.
Réponses de MM. H. SEBBAN et V. THÉBAULT.

5015 (**1920**, 6) (A. CUNNINGHAM). — *Suite de certains nombres.* — Soient $(m-1)$, (m) deux nombres écrits en $(m-1)$ et m chiffres 1. Il s'agit de trouver des nombres N tels que

$$N \equiv (m-1) \bmod (m).$$

Comme le premier de ces nombres est

$$N_1 = (m) + (m-1),$$

le suivant sera

$$N_2 = 2(m) + (m-1), \quad \ldots.$$

On aura donc pour le terme général

$$N_p = p(m) + (m-1).$$

Exemple. — Partant de $(m-1) = 111$, on aura

$$\begin{aligned} N_1 &= 1111 + 111 = 1222, \\ N_2 &= 2222 + 111 = 2333, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ N_9 &= 9999 + 111 = 10110, \\ N_{10} &= 11110 + 111 = 11221, \end{aligned}$$

et ainsi de suite. H. BROCARD.

5019 (**1920**, 7) (A. GÉRARDIN). — *Triangles pour lesquels* R *et* r *sont des carrés.* — Un exemple de ces triangles peut se déduire des résultats publiés par M. Barisien (*Mathesis*, 1913, p. 14 et 47).

En effet dans le triangle Δ 7.15.20, on a

$$R = 12,5, \qquad r = 2,$$

de sorte que pour les triangles semblables $2m^2\Delta$, R et r sont deux carrés.

D'après des remarques de M. V. Thébault (*Ibid.*, p. 208), le triangle précité Δ a son aire et son périmètre représentés par le même nombre. En outre, il est obtusangle et pseudo-rectangle, autrement dit, deux de ses angles ont pour différence 90°.

H. BROCARD.

5021 (**1920**, 8). (G. LEMAIRE). — *Étoile nommée Keuterlin.* — Il s'agit très vraisemblablement de g de la Grande Ourse (Alcor), vulgairement appelée « Le Cavalier », située à une distance de 11′48″ de ζ (Mizar ou Al-Anak). Voici ce qu'en dit Flammarion :

La plus ancienne notification que je connaisse d'Alcor est celle de l'astronome persan Abd-al-Rahman-al-Sûfi, qui, dans sa *Description du Ciel* rédigée au x^e siècle de notre ère, écrit « Au-dessus d'Al-Anak est une petite étoile qui lui est contiguë, que les Arabes nomment al-Suhâ (la petite négligée) et dans quelques dialectes al-Saïdak (l'étoile de confiance). Ptolémée n'en parle pas, et c'est celle dont on se sert pour essayer la portée de la vue. On dit proverbialement : Je lui fais voir al-Suhâ et il me montre la pleine lune ». Ce proverbe rappelle celui de la paille et la poutre.

(*Les étoiles et les curiosités du Ciel.* Chap. IV, p. 101).

La solution de la question serait sans doute facilitée par la connaissance de la signification du mot arabe Keuterlin.

P. HENDLÉ.

5024 (**1920**, 8) (P. MOREL). — *Lieu des foyers des coniques passant par un point donné, tangentes à une droite donnée, et osculatrices à une cubique cuspidale.* — Si ν est le nombre de coniques du système tangentes à une droite quelconque, le lieu des foyers est d'ordre $p = 3\nu$ et admet les points cycliques pour points multiples d'ordre ν.

La tangente inflexionnelle de la cubique cuspidale, et la droite qui joint le point donné à l'intersection de cette tangente et de la droite donnée, forment un couple qui doit compter pour trois coniques du système : il passe donc par cette intersection six branches du lieu des foyers.

Pour le calcul du nombre ν, *voir* les formules Cayley dans SALMON, *Courbes planes.* Chap. IX.

On trouve ainsi $\nu = 20$, d'où $p = 60$. P. HENDLÉ.

5026 (**1920**, 9) (G. LEMAIRE). — *Sur le calendrier Paul Delaporte.* — Les études et travaux qui m'ont amené au *Chronos* ont été exposés ou résumés, notamment dans :

1912. *Le Calendrier universel*, par Paul Delaporte (Paris, Le Soudier, daté en librairie 1913).

1917. *Le synchronisme hebdomadaire*, *journal des économistes*, 15 février 1917 (tirages à part datés, par erreur, du 15 avril 1916).

1919. Le *Chronos* ou calendrier économique auxiliaire, Communication à la Commission pour la réforme du calendrier, de la Société d'Encouragement pour l'Industrie nationale (*Bulletin*, juillet-août 1919).

Ces trois publications marquent particulièrement :

1° Les résultats de ma recherche, de longue date (1878), d'une formule métrique de substitution aux règles du calendrier.

2° Après essais, évolution vers application, d'abord, aux calculs ou emplois scientifiques, économiques, etc.

3° Rejet, enfin, pour cause de trop grandes et trop longues difficultés à vaincre, de l'idée de substitution immédiate, pour adopter une superposition préalable, préparatoire d'un emploi général exclusif ou non, dans un temps plus ou moins rapproché.

PAUL DELAPORTE.

5027 (**1920**, 9) (J. PACÉ). — *Nombres décomposables de deux façons en somme de deux carrés.* — Ces nombres sont les produits de deux sommes de deux carrés, ou de la forme

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

comme on le verra dans la Note de M. Laisant (*S. Œ.*, 1919, p. 145-147) : Sur l'identité

$$x^2+y^2=z^2+t^2$$

en nombres entiers.

Cette propriété est connue depuis bien longtemps, car elle s'exprime par l'identité

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac\pm bd)^2+(ad\mp bc)^2.$$

Dans son *Formulaire de Mathématiques*, 1899, p. 53, M. G. Peano l'attribue à Diophante (III, prop. 22).

Dans une Note de M. A. Aubry aux *Récréations mathématiques* Rouse Ball (3e Partie, 1909, p 141), le problème de Diophante serait de trouver un triangle rectangle ayant même hypoténuse qu'un triangle rectangle donné.

La même identité a été aussi rapportée à Fibonacci.

H. BROCARD.

Autres réponses de MM. SEBBAN et CATHMIRE.

5028 (**1920**, 33) (H. DE MONTILLE). — *Propriété du quadrilatère*

complet. — Le théorème général suivant, que nous croyons nouveau, renferme la proposition visée comme cas particulier :

Soient α, β, γ, δ *quatre droites auxquelles nous associons quatre coefficients* λ, μ, ν, τ; *considérons, dans le triangle* ABC *de côtés* a, b, c *formé par* α, β, γ, *le point* M *de coordonnées normales* λa, μb, νc, *et déterminons, dans l'involution définie par* AM, BM, CM *et les parallèles aux côtés menées par* M, *le rayon* δ' *conjugué à la direction* δ; *les droites analogues à* δ', *obtenues en considérant les triples de droites* $\beta\gamma\delta$, $\gamma\delta\alpha$, $\delta\alpha\beta$ *concourent avec* δ' *en un point* P *qui est le centre de gravité des masses* λ^{-1}, μ^{-1}, ν^{-1}, τ^{-1} *placées en ses projections sur les droites données* α, β, γ, δ.

Il suffit de faire $\lambda = \mu = \nu = \tau = 1$, pour trouver le cas envisagé dans l'énoncé; pour λ, μ, ν, τ égaux à ± 1, on obtient une proposition dans laquelle interviennent les associés des points de Lemoine de certains triangles.

Le principe de la démonstration consiste en ce que, L étant un point de BC, le rayon conjugué de ML dans l'involution considérée est la perpendiculaire abaissée de M sur la droite joignant L au point m qui divise, dans le rapport $\mu : \nu$, la distance des projections de L sur AC et AB. Soient, en effet, Q et J les intersections de AM avec BC et avec le cercle ABC, F le symétrique de J par rapport à BC, N le point où BC rencontre la perpendiculaire abaissée de M sur Lm; quand L se déplace sur BC, Lm enveloppe la parabole de directrice AM et de foyer F. On en déduit facilement que les points L, M, J, N sont concycliques; le produit NQ.QL reste constant, et, comme aux positions B et C de L correspondent des parallèles à AC et AB, la direction MN est bien conjuguée de ML dans l'involution envisagée.

Or, le lieu du point g qui est le centre de gravité des masses λ^{-1}, μ^{-1}, ν^{-1}, τ^{-1} placées en ses projections sur les côtés de ABC et sur une droite variable D qui se déplace parallèlement à une droite δ est une droite Δ; quand MN est parallèle à δ, Δ n'est autre que ML, c'est-à-dire δ'; car, quand D passe par M, g coïncide avec M, et, d'autre part, le point g coïncide avec L quand D passe par le point qui divise mL dans le rapport $1 + \lambda\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}\right)$. Comme le point P est aussi un point g, il appartient à δ', ce qui démontre le théorème.

R. Goormaghtigh.

R. R #3

MAY 9 19..

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS

FONDÉ EN 1894 PAR C.-A. LAISANT ET ÉMILE LEMOINE

DIRECTEURS-RÉDACTEURS

Ed. MAILLET
Docteur ès sciences
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées
Examinateur à l'École Polytechnique

A. MALUSKI
Agrégé de Mathématiques
Ancien élève de l'École Normale Supérieure
Proviseur du Lycée de Sceaux

A. BOULANGER
Directeur des Études à l'École Polytechnique

J. LEMAIRE
Professeur au Lycée Janson de Sailly
Répétiteur à l'École Polytechnique

Publication honorée d'une souscription du Ministère de l'Instruction publique

TOME XXVII — 1920

N^os 11 et 12. — NOVEMBRE-DÉCEMBRE 1920

VOIR LES AVIS DIVERS ET LA CORRESPONDANCE à la page 2 de la Couverture

PARIS

GAUTHIER-VILLARS et C^ie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1920

SOMMAIRE DES Nos 11 ET 12.

S'adresser, pour la rédaction, à M. *Ed. Maillet*, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, 11, rue de Fontenay, Bourg-la-Reine, ou à M. *A. Boulanger*, directeur des Etudes à l'École Polytechnique, ou à M. *J. Lemaire*, professeur au Lycée Janson de Sailly, 18, rue Eugène Manuel, Paris (16e) ; pour les abonnements et les tirages à part, à MM. *Gauthier-Villars et Cie*, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

Rédacteur de service : M. J. LEMAIRE.

AVIS DIVERS

QUESTIONS récentes de MM. Aubry, L. Bickart, Boris, Despujols, Hendlé, Lecat, G. Lemaire, Métrod, de Montessus de Ballore, Pacé, Sebban.

RÉPONSES récemment reçues de MM. L. Aubry, **4755**, **4969** ; A. Boutin, **5076** ; R. Bouttard, **4963**, **4966** ; Colucci, **4958** ; Despujols, **4744**, **4963**, **4964**, **4969**, **5011** ; A. Gérardin, **4964** : Goormaghtigh, **4969** ; A. Haarbleicher, **5080** ; H.-P. Hudson, **4955** ; G. Lemaire, **5021** ; Marchay, **5011** ; Métrod, **4963** ; Tournaire, **4910** ; E. Viglezio, **5082**.

Nous prions nos Correspondants de rappeler leur adresse dans chacun de leurs envois ; de *n'écrire que sur le recto de la feuille*. Les formules doivent être écrites et les figures *faites avec le plus grand soin*, de façon qu'elles ne prêtent à aucune ambiguïté pour l'impression, particulièrement en ce qui concerne les indices, les signes, etc. En général, rien de ce qui est à imprimer ne doit être oublié, la ponctuation par exemple. La dactylographie est recommandée. Nous prions nos correspondants d'une manière tout à fait instante, de s'attacher, dans la mesure du possible, à ne pas omettre, lorsqu'ils citent un périodique, l'année de la publication, renseignement aussi important que celui de sa tomaison.

La Rédaction fait appel au zèle de ses collaborateurs pour l'aider à la publication des numéros en retard, en lui envoyant de nombreuses questions et solutions ; elle serait fort reconnaissante à ceux qui voudraient bien lui signaler les errata des numéros de 1920 et des années précédentes.

QUESTIONS.

5085. [**I 19 c**] Il y a lieu d'apporter quelques précisions aux travaux de divers auteurs au sujet de l'étude en nombres entiers de

$$\pm y^2 \pm x^3 = a. \tag{1}$$

Le R. P. Pépin a notamment publié sur ces nombres les très intéressants travaux suivants : *Sur l'équation indéterminée* $x^2 + cy^2 = z^3$ (*N. L. M.*, 1892 ; *C. R.*, t. **119**, 13 août 1894, p. 397 ; t. **120**, Rectification, 4 mars 1895, p. 494 ; 10 juin 1895, p. 1254-1256 ; *A. S. B.*, t. **27**, 2e Partie, 1903).

Il dit notamment (*N. L. M.*, p. 8-9) : « En un mot, pour chacune des valeurs suivantes de c : ..., 191, ..., 767, ..., il existe un carré et un seul qui devient un cube par l'addition du nombre c. » M. H. Brocard a signalé (*C. R.*, p. 397, *loc. cit.*) $191 = 6^3 - 5^2$. Th. Pépin ajoute alors : « Je n'ai considéré dans cette étude que les cas où le cube est impair. »

J'indique de même

$$767 = 12^3 - 31^2 = 1023^3 - 32720^2.$$

Ces résultats sont extraits de ma Table de toutes les solutions de (1) pour $|a| \leqq 2000$ que je publierai au *S. Œ.*, après compléments.

Je relève une erreur de Th. Pépin (*N. L. M.*, p. 11, *loc. cit.*) : « Pour toutes les valeurs de c qui restent dans le tableau, savoir : 3, ..., 67, ..., 98, on a des théorèmes semblables aux suivants : 1° Dans la suite indéfinie des carrés entiers, il n'y en a pas un seul qui devienne un cube lorsqu'on lui ajoute 3 unités.... En un mot, il n'existe aucun carré qui

devienne égal à un cube lorsqu'on lui ajoute l'un des nombres inscrits dans le tableau précédent. »

Or, j'ai trouvé $67 = 23^3 - 110^2$ à racine impaire pour le cube. Je demande d'autres précisions pour des cas analogues.

Cf. **2855** (**1904**, 285) (E. Maillet), *Erreurs de Mathématiciens* (**1905**, 275; **1906**, 65, 110, 150, 200, 248; **1907**, 31, 275; **1908**, 60, 230; **1909**, 272; **1911**, 32; **1912**, 130, 180; **1913**, 152).

A. Gérardin.

5086. [**I19c**] (Σ) M. E. B. Escott a étudié en 1908 certaines équations en nombres entiers. Ainsi il a donné dans les *Mathematical Questions and Solutions from the Educational Times*, 1908-1909, vol. **15**, p. 82-83 :

$$x^3 - 2x^2 - x + 1 = y^2 - y - 1 \tag{1}$$

que l'on pourrait écrire

$$(x-2)(x-1)(x+1) = (y-1)y, \tag{2}$$

mais qu'il a mise sous la forme

$$4x^3 - 8x^2 - 4x + 9 = z^2 \tag{3}$$

admettant les solutions entières suivantes :

$$\begin{array}{llllllllll} x = -1, & 0, & 1, & 2, & 4, & 5, & 7, & 40, & 134, & 189, \\ z = 1, & 3, & 1, & 1, & 11, & 17, & 31, & 493, & 3079, & 5169. \end{array}$$

Chercher si cette équation admet d'autres solutions en entiers.

Indiquer d'autres équations de la forme

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = y^2$$

admettant plusieurs solutions en nombres entiers.

A. Gérardin.

5087. [**I19c**] Bibliographie du problème suivant :

« Trouver *une* solution rationnelle de

$$X_1^4 + aX_1^3X_2 + \ldots + dX_2^4 = KZ^2$$

lorsque $K \neq 1$. » DESPUJOLS.

5088. [**I19c**] B_μ étant un nombre satisfaisant à la condition $\overline{A}_\mu^2 - 2\overline{B}_\mu^2 = 1$, où μ est le rang de la solution, le nombre

$$B_\mu . B_{\mu+1} \qquad (\mu \geqq 1)$$

est congruent du second ordre. DESPUJOLS.

5089. [**I19c**] Qui, et dans quel Ouvrage, a donné la solution générale du neuvième degré, de

$$X_1^3 + X_2^3 = KZ^3$$

avec des paramètres arbitraires? DESPUJOLS.

5090. [**I19c**] Le théorème suivant a-t-il déjà reçu quelques applications? Par qui? Où?

« Lorsqu'on possède une solution d'un problème du quatrième degré à n variables ($n \geqq 4$), la solution générale ne dépend plus que de la carrification d'une fonction quadratique.

» La solution de cette fonction étant obtenue, la solution générale du problème principal donné renfermera ($n - 2$) paramètres arbitraires? »

Tombent sous le coup de ce théorème, les problèmes :

4991, de M. Gérardin ;
4980, de M. Colucci, quand une solution sera connue ;
4913, de M. Colucci ;
4893, de M. Rignaux. DESPUJOLS.

5091. [**I19c**] Le résultat suivant est-il connu :

Si l'on possède une solution d'une quartique

$$X_1^4 + aX_1^3X_2 + \ldots + dX_2^4 = KZ^2,$$

on pourra généralement obtenir une solution générale possédant trois paramètres arbitraires ?

On peut, semble-t-il, induire de ce théorème que généralement le rang des quartiques n'est pas fini ; ce qui justifierait le sentiment de H. Poincaré sur ce sujet (*Memor*, **4744**).

DESPUJOLS.

5092. [**I19c**] Je désirerais avoir la bibliographie du théorème suivant :

« Si A est de la forme $a^2 \pm d$, d étant diviseur de $2a$, les solutions minima de l'équation de Fermat $x^2 - Ay^2 = +1$ sont

$$x = \frac{2a^2}{d} \pm 1, \quad y = \frac{2a}{d}. \text{ »}$$

DESPUJOLS.

5093. [**K9a**] On décompose un polygone de toutes les manières possibles en triangles au moyen de diagonales ne se coupant pas ; quel est le nombre total des triangles ne contenant qu'une diagonale ? G. MÉTROD.

5094. [**A1a**] Dans le problème classique : *n joueurs conviennent que le perdant doublera l'argent des autres. A tour de rôle, ils perdent une partie et, à la fin, ils ont tous la même somme. Combien chacun avait-il au début?* Si l'on désigne l'avoir de chacun par le plus petit nombre entier possible, avec les réponses obtenues pour 2, 3, 4, 5, ..., n joueurs, on peut former le Tableau suivant :

Nombre de joueurs.	Avoir du 1er.	2e.	3e.	4e.	5e.	...	$n$ième.
2.....	5	3					
3.....	13	7	4				
4.....	33	17	9	5			
5.....	81	41	21	11	6		
......	...	...	...	...	...	...	...
n.....	$1+n2^{n-1}$	$1+n2^{n-2}$	$1+n2^{n-3}$	$1+n^{2-4}$	$1+n2^{n-5}$	...	$1+n$.

La somme S_1 de tous les nombres compris dans ce Tableau a pour expression

$$S_1 = (n - 1)\,2^{n+1}.$$

On demande de trouver la somme de leurs carrés, de leurs cubes, etc., c'est-à-dire S_2, S_3, ..., S_n.

Peut-on trouver

$$S_a = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n\,?$$

J. Pacé.

5095. [**I9a**] On sait que Dirichlet a donné une démonstration du théorème : « Toute progression arithmétique, dont le premier terme et la raison sont des entiers premiers entre eux sans diviseur commun, contient une infinité de nombres premiers » (*Journal de Liouville*, t. 4, 1839, p. 393-422), *or sa démonstration n'est pas du tout concluante.*

En effet, il prouve d'abord que pour $s > 1$ et seulement > 1, et pour $\omega^{p-1} = 1$, on a

$$(1)\qquad \prod \frac{1}{1 - \omega^{\gamma}\frac{1}{q^s}} = \sum \omega^{\gamma}\frac{1}{n^s} = L,$$

puis ensuite, il emploie des procédés analytiques qui exigent la supposition $s = 1 + \rho$ avec ρ, infiniment petit, et même (*loc. cit.*, p. 402-406) le raisonnement est fait comme si l'on supposait $s = 1$; il y a donc déjà une grave contradiction, puisque le raisonnement analytique n'est absolument rigoureux que pour la limite $s = 1$ et que, pour cette valeur de s, la relation (1) est inexacte.

De plus et voici le plus grave, Dirichlet conclut qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme donnée, parce que, dans une équation déduite de (1), on a le premier membre fini et le deuxième $= \infty$, à cause de $\log L_0 = \infty$, pour $s = 1 + \rho$ et ρ infiniment petit ; or, la démonstration de (1) est basée sur la convergence de la série $\sum \frac{1}{h^s} > L_0$ par construction ; donc si l'on a $\log L_0 = \infty$, on a à beaucoup

plus forte raison $L_0 = \infty$, et encore à plus forte raison la série $\sum \frac{1}{h^s} = \infty$ et non convergente, donc la démonstration de (1) ne s'applique pas pour cette valeur de s et, par suite, n'est pas concluante.

Que pensent les correspondants de l'*I. M.* de ces remarques (que j'ai déjà signalées dans le *S. Œ.*)? L. Aubry.

5096. [**A3g**] On calcule dans les Cours d'Algèbre la limite supérieure de l'erreur commise dans l'application de la méthode d'approximation de Newton, pour la recherche d'une racine de l'équation $f(x) = 0$ comprise dans l'intervalle (a, b). Cette limite supérieure est $\frac{(b-a)^2 M}{2\mu}$, M étant la limite supérieure de $|f''(x)|$ dans l'intervalle (a, b) et μ la limite inférieure de $|f'(x)|$ dans ce même intervalle.

Pourquoi s'abstient-on habituellement de donner la limite supérieure de l'erreur commise dans l'application de la méthode des parties proportionnelles qui, avec les mêmes notations, est égale à $\frac{(b-a)^2 M}{8\mu}$, c'est-à-dire quatre fois plus petite que pour la méthode de Newton?

Quel avantage y a-t-il à appliquer la méthode de Newton, qui est d'un emploi plus délicat et qui donne une approximation beaucoup moins bonne que la méthode des parties proportionnelles? Vaulot.

5097. [**S4**] Je serais heureux de savoir si le raisonnement suivant est exact et s'il a déjà été formulé :

Je considère l'expression de l'énergie totale d'un système. Il y a des termes finis, comme la force vive par exemple, qui s'expriment par une fonction donnée de l'état du système. Il y a aussi des termes, comme les énergies thermique et volumétrique, qui ne sont pas intégrables, c'est-à-dire qui dépendent du chemin suivi par le système pour arriver à l'état. Cela posé, je suppose que le système éprouve une transformation telle qu'il reçoit ou cède au milieu une énergie non

intégrable suivant une loi arbitraire (cela est essentiel). Je dis qu'une autre forme d'énergie non intégrable doit être aussi reçue ou cédée au milieu. En effet, puisque par hypothèse il apparaît dans l'expression de l'énergie un terme non intégrable, il faut qu'il s'en présente encore un autre de même nature, moyennant quoi la somme des deux termes soit intégrable. Autrement, nous aurions, passant au premier membre toutes les énergies intégrables, et étant donné que l'énergie totale l'est toujours, une expression intégrable égale à une autre qui ne l'est pas, ce qui est absurde. Je dis que la transformation de l'énergie en question doit se produire d'après une loi quelconque. En effet, il y a pour chaque cas une évolution déterminée pour laquelle la loi tombe en défaut. Par exemple, si l'on chauffe un corps d'une manière arbitraire, c'est-à-dire de façon que son entropie et sa température varient en fonction du temps d'après des lois quelconques, le corps doit augmenter de volume. A l'énergie thermique reçue correspond un travail élastique développé, c'est-à-dire une énergie volumétrique cédée au milieu.

Mais la loi tombe en défaut pour l'échauffement à volume constant. Alors la loi de l'échauffement n'est pas quelconque, l'évolution du système se faisant suivant un chemin tout déterminé.

Je crois la loi énoncée d'une certaine importance, puisqu'elle permet de prévoir les phénomènes qui doivent se produire dans certaines conditions données. S'il y a donc des énergies non intégrables, outre les énergies thermique et volumétrique, elles doivent toujours se présenter par groupe de deux. M. Velasco de Pando (Séville, Espagne).

5098. [**T2**[Le problème de l'équilibre d'élasticité d'un corps homogène isotrope conduit à trois équations aux dérivées partielles du second ordre dont chacune est de la forme

$$(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+X=0,$$

λ, μ étant des constantes, u, v, w, les trois composantes du déplacement d'un point du corps, x, y, z ses coordonnées, X la composante correspondant à u de la force extérieure appliquée à l'élément. En outre, les dérivées partielles du premier ordre de u, v, w doivent satisfaire sur la surface du corps à trois conditions linéaires qu'il est inutile d'écrire. Je désire savoir si la question d'existence des solutions dans le domaine réel, pour un semblable système d'équations avec telles conditions aux limites, est aujourd'hui complètement résolue et dans l'affirmative, quel est l'ouvrage où elle se trouve le plus clairement exposée.

Je serais encore heureux de savoir quelque chose sur les procédés généraux connus d'intégration pour ledit système.

M. VELASCO DE PANDO (Séville, Espagne).

5099. [**M²4e**] Un cercle et un axe de rotation ne sont pas dans le même plan. La distance D du cercle à l'axe étant la distance de son centre à cet axe, la surface engendrée par le cercle de rayon R tournant à la distance D de l'axe peut être engendrée aussi par un cercle de rayon D tournant à la distance R du même axe.

Ce théorème généralise ceux de Mannheim et d'Yvon Villarceau.

Mais il paraît pouvoir lui-même être généralisé. Les inverses des surfaces réglées du second degré sont définissables par des systèmes de cercles. Les plans et sphères bitangentes donnent lieu aux théorèmes d'Yvon Villarceau et Mannheim, les surfaces bitangentes sont *a priori* orthogonales à des sphères fixes.

Comment donner au théorème, et au point de vue géométrique pur, sa plus grande extension? R. DESPUJOLS.

RÉPONSES.

4537 (**1915**, 195; **1916**, 134; **1918**, 105) (P. Hendlé). — *Sur une opinion de Rollin.* — Je me vois forcé de faire amende honorable à Rollin, car l'opinion que je lui ai attribuée n'est pas de lui. Voici : ce qu'il en dit lui-même dans l'Avertissement (que je n'avais pas lu) du Livre **27** de son *Histoire ancienne :* « Je dois avouer, à ma confusion, que les matières que je « vas » traiter me sont absolument inconnues, si l'on en excepte ce qui s'y trouve d'historique. Mais, par un privilège que je me suis attribué, et dont il me semble que le public ne m'a point su mauvais gré, je suis en possession de profiter des richesses d'autrui. Quels trésors n'ai-je pas trouvés dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences !...* »

Effectivement, l'opinion sur l'algèbre que je lui ai reprochée à tort figure presque identiquement dans l'éloge de Rolle par Fontenelle. Mais, comme celle de Condorcet, cette opinion n'est que plus étrange pour avoir été écrite par un secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, auteur de la préface de l'*Analyse des infiniment petits* du marquis de L'Hospital, et des *Éléments de la géométrie de l'infini.* P. Hendlé.

4910 (**1919**, 37) (F. Balitrand) (**1919**, 127; **1920**, 119). — *Cours de Chasles à l'École Polytechnique.* — Michel Chasles a été nommé en 1842 professeur de Géodésie et de Machines en remplacement de Savary. Il a occupé ces fonctions jusqu'en 1851, époque à laquelle il démissionna à peu près en même temps que Joseph Liouville et après que Duhamel eut quitté la direction des études. Il a eu pour successeur Hervé Faye, pour la Géodésie, les Machines ayant été rattachées à une autre chaire. Jamais Chasles ni Savary n'ont été chargés d'enseigner l'Analyse à l'École.

Chasles a fait partie du Conseil de Perfectionnement, en même temps que Liouville, en 1848 et en 1850. Le Conseil fut alors supprimé et remplacé par la fameuse Commission mixte, composée de Poncelet, Noizet, Piobert, Morin, Mathieu, Regnault, Michel Chevalier, Thénard, Ollivier, Mary et Le Verrier; Le Verrier fut l'âme, damnée, dit-on, de cette Commission.

En 1853, le Conseil de Perfectionnement réapparut, avec son ancienne composition. Le Verrier et Poncelet y furent les délégués de l'Académie des Sciences, l'un jusqu'en 1863, l'autre jusqu'en 1866; Le Verrier fut remplacé en 1867 par Chasles, qui siégea jusqu'à sa mort, survenue en 1881. Une délégation d'élèves de l'École, dont fit partie le professeur actuel de Géométrie, M. d'Ocagne, conduisit le corps de Chasles au cimetière du Père-Lachaise sous une pluie torrentielle.

Quant au motif de la démission de Chasles, l'hypothèse de M. Balitrand est exacte; mais l'attitude de l'opposant fut facilitée par sa situation de fortune et par l'enseignement qui lui avait été confié à la Sorbonne; on peut en dire d'ailleurs autant de Liouville, professeur au Collège de France.

Enfin, les inscriptions commémoratives de l'amphithéâtre annexe, construit après la guerre de 1870-1871, et où ont lieu aussi bien les cours de Géométrie et d'Astronomie que ceux d'Analyse, ne sauraient en l'espèce fournir aucun argument. *Is. Uber.*

4935 (**1919**, 73) (H. Brocard). — *Au sujet des nombres e^{π} et π^{e}* (**1920**, 65). — Le *S. Œ.* (1920, p. 127-128) a publié une note de M. L. Chanzy donnant les nombres e^{π} et π^{e} avec dix décimales.

Une évaluation première et insuffisante de ces nombres m'avait fait penser à une relation approximative telle que

$$e^{\pi} - \pi^{e} = 2(G - C),$$

G étant la somme de la série

$$1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots$$

et C la constante d'Euler; mais les nouvelles déterminations précises que je viens de rappeler ne confirment pas la relation envisagée.

Peut-être faudra-t-il essayer d'autres combinaisons plus compliquées.

Toutefois, c'est certainement trop vouloir que des nombres transcendants tels que π et e, qui ont une relation très simple dans l'imaginaire, aient aussi des relations dans le réel, avec d'autres transcendantes provenant, comme eux, de séries sommables.

Le hasard mettra peut-être sur la voie de nouvelles approximations. H. Brocard.

4955 (**1919**, 100) (*Derennes*). — *Sur combien de plans projeter*

une courbe C *pour affirmer son degré?* — La question **1422** (**1899**, 2), presque identique, pourra être utile à rappeler :

« Une courbe plane C du $n^{\text{ième}}$ degré se projette sur un plan suivant une courbe qui est en général du $n^{\text{ième}}$ degré. Sur combien de plans de directions différentes faut-il qu'une courbe se projette suivant une courbe de degré n pour que l'on puisse affirmer qu'elle est *plane* et de degré n? »

Il s'agit sans doute de projections orthogonales. Cependant, cette question particulière à des courbes planes n'a pas obtenu de réponse.

La question, pour des courbes gauches, a été proposée ultérieurement par E. Lemoine (nº **1975**, **1900**, 360).

Une réponse a été donnée (**1901**, 123) par Lucien Lévy (avec l'observation que la projection doit être orthogonale).

Ces références ne fournissent pas la solution de la question **4955**, mais elles montrent que le sujet a déjà fixé l'attention de nos collaborateurs.

H. Brocard.

4963 (**1919**, 103) (A. Gérardin). — *Solutions entières du système*

$$x^2+y^2=A^2,$$
$$x+y^2=B^2.$$

Posons

$$B=y+\alpha,$$
$$A=x+\beta;$$

il vient

$$B^2=y^2+2\alpha y+\alpha^2=x+y^2,$$

d'où

$$y=\frac{x-\alpha^2}{2\alpha}.$$

La première équation devient

$$x^2+\frac{(x-\alpha^2)^2}{4\alpha^2}=x^2+2\beta x+\beta^2$$

ou

$$x^2-2(\alpha^2+4\alpha^2\beta)x+\alpha^2(\alpha^2-4\beta^2)=0.$$

Pour une solution particulière $\alpha=2\beta$, on a de suite

$$x=2\alpha^2(1+4\beta)=8\beta^2(1+4\beta)$$

et ensuite

$$y=\beta(1+8\beta),$$
$$B=\beta(3+8\beta),$$
$$A=\beta(1+8\beta+32\beta^2),$$

avec $\beta = 2$, on a la solution de M. Gérardin :

$$x = 288, \qquad y = 34, \qquad A = 290, \qquad B = 38.$$

R. BOUTTARD.

L'élimination de x donne

$$B^4 - 2y^2 B^2 + y^4 + y^2 - A^2 = 0,$$

d'où

$$B^2 = y^2 \pm \sqrt{A^2 - y^2}.$$

En posant

$$y = 2pq, \qquad A = p^2 + q^2,$$

il vient

$$B^2 = 4p^2 q^2 \pm (p^2 - q^2).$$

Considérons le signe supérieur, car l'autre nous fournirait les mêmes résultats.

En faisant $q = 1$, on tire

$$B^2 - 5p^2 = -1,$$

équation de Fermat résoluble en entiers. En voici quelques solutions :

$$B = 2, \quad 38, \quad 682, \ldots,$$
$$p = 1, \quad 17, \quad 305, \ldots,$$

dont la loi de récurrence est

$$T_{n+1} = 18\,T_n - T_{n-1}.$$

Alors

$$A = p^2 + 1, \qquad y = 2p, \qquad x = B^2 - y^2 = B^2 - 4p^2,$$

et l'on a pour le système donné

$$x = 0, \quad 288, \quad 93024, \quad \ldots;$$
$$y = 2, \quad 34, \quad 610, \quad \ldots;$$
$$A = 2, \quad 290, \quad 93026, \quad \ldots;$$
$$B = 2, \quad 38, \quad 682, \quad \ldots.$$

De même, en faisant $p = 1$, on obtient

$$B^2 - 3q^2 = 1,$$

d'où

$$B = 2, \quad 7, \quad 26, \quad \ldots,$$
$$q = 1, \quad 4, \quad 15, \quad \ldots,$$

avec

$$T_{n+1} = 4\,T_n - T_{n-1},$$

et enfin

$$\begin{array}{llll} x = 0, & -15, & -224, & \ldots; \\ y = 2, & 8, & 30, & \ldots; \\ A = 2, & 17, & 226, & \ldots; \\ B = 2, & 7, & 26, & \ldots. \end{array}$$

A. Colucci.

Pour la première équation proposée, on a

$$x = a^2 - b^2, \quad y = 2ab, \quad A = a^2 - b^2,$$

ce qui donne pour la deuxième

$$a^2(4b^2+1) - b^2 = B^2.$$

En faisant $b = 1$, on a l'équation de Fermat

$$-1 = B^2 - 5a^2,$$

qui donne une infinité de valeurs pour B et a. D'une façon générale, on peut prendre pour b une valeur quelconque, et résoudre l'équation indéterminée du deuxième degré

$$B^2 - (4b^2+1)a^2 = -b^2.$$

G. Métrod.

5030 (**1920**, 33) (*Nemo*).— *Impossibilité de quatre carrés en progression arithmétique.* — Soient

$$q^2 + r = m^2, \quad q^2 + 2r = n^2, \quad q^2 + 3r = p^2,$$

on peut évidemment supposer q, m, n et p sans facteur commun, et par suite q premier avec r; d'autre part, $2r = n^2 - q^2$ est toujours divisible par 4, d'où r pair et par suite q impair ainsi que m; donc $r = m^2 - q^2$ est divisible par 8.

Posons

$$r = 8y, \quad x = q^2 + \frac{3}{2}r, \quad u = mn, \quad v = pq,$$

on a x premier avec y et

$$x^2 - 16y^2 = u^2, \quad x^2 - 144y^2 = v^2;$$

ces deux triangles rectangles en nombres exigent, comme on sait :

$$\begin{array}{lll} x = a^2 + b^2, & 4y = 2ab, & \pm u = a^2 - b^2, \\ x = c^2 + d^2, & 12y = 2cd, & \pm v = c^2 - d^2, \end{array}$$

d'où

$$2y = efgh,$$

f ou g pair, et

$$a = ef, \quad b = gh, \quad c = 3eg, \quad d = fh,$$
$$x = e^2f^2 + g^2h^2 = 9e^2g^2 + f^2h^2,$$
$$e^2(f^2 - 9g^2) = h^2(f^2 - g^2);$$

x étant premier avec y, f est premier avec g; et puisque f ou g est pair, $f - 3g$, $f + 3g$, $f - g$ sont impairs et premiers entre eux deux à deux; donc l'équation ci-dessus exige

$$e = m_1n_1, \quad h = p_1q_1,$$
$$f - 3g = q_1^2, \quad f + 3g = p_1^2, \quad f - g = m_1^2, \quad f + g = n_1^2,$$

c'est-à-dire quatre carrés en progression arithmétique et de raison $r_1 = 2g = \frac{r}{2efh}$; en continuant le même raisonnement, on trouverait donc quatre carrés en progression arithmétique et de raison $r_n = \frac{r}{2^n N}$ non divisible par 8, ce que nous savons impossible.

L. Aubry.

Le problème revient à l'étude du système

$$2x^2 - y^2 = a^2, \qquad 2y^2 - x^2 = b^2;$$

or M. L. Aubry a montré (*I. M.*, **1919**, 152) que ce système n'admet pas d'autres solutions que

$$x = y = a = b = \pm 1;$$

le problème proposé est donc impossible. R. Goormaghtigh.

D'après M. A. Aubry (*Récr. math.* de W. Rouse Ball, 3e Partie, 1909, p. 140), le problème de trouver trois carrés en progression arithmétique a été proposé par Fibonacci; mais la solution remonte sans doute aux Arabes, qui ont aussi reconnu que la raison est un multiple de 24.

Des solutions, en nombre infini, sont exprimées par les formules

$$(\lambda^2 - \mu^2 - 2\lambda\mu)^2, \quad (\lambda^2 + \mu^2)^2, \quad (\lambda^2 - \mu^2 + 2\lambda\mu)^2.$$

Pour une étude systématique, je signalerai les deux articles de Guibert (*N. A.*, 1862, p. 213-219 et 249-252).

Le même journal a publié (1871, p. 295-301) une autre étude, de

Désiré André, mais pour trois carrés en progression arithmétique ou en progression harmonique.

Pour quatre nombres, Guibert a montré que tous quatre ne sauraient être carrés; il y a une lacune pour l'un d'entre eux, ce qui donne une progression telle que a^2, b^2, c^2, d^2.

L'existence de quatre carrés en progression arithmétique, a^2, b^2, c^2, d^2, a été reconnue impossible, et l'on en trouvera la démonstration par M. L. Aubry au *S. Œ.*, 1911, p. 1-2.

S'il existait un groupe de ces carrés, la raison serait multiple de 8.

Note. — L'équation

$$x^2 + y^2 = 2z^2$$

qui traduit la relation entre trois carrés x^2, z^2, y^2, en progression arithmétique,

$$x^2 - z^2 = z^2 - y^2 = u,$$

a été déjà étudiée ici, comme on le vérifiera aux réponses

3355 : **1908**, 54; **1908**, 164, 252; **1912**, 38.

3390 : **1908**, 102; **1908**, 259; **1909**, 19, 156, 254; **1910**, 36.

4271 : **1913**, 219; **1914**, 20, 43, 176; **1915**, 57, 117; **1916**, 111; **1919**, 183.

4663 : **1916**, 172; **1917**, 20, 58.

Il en a été antérieurement question au *S. Œ.* Voir **1906**, 95 (cité *I*, *M.*, **1908**, 260).

Parmi diverses manières de les présenter, les formules indiquées ci-dessus fournissent la solution générale de l'équation donnée.

Il est important aussi de rappeler que l'équation

$$a^2 + c^2 = 2b^2$$

caractérise les triangles automédians, dont l'étude encore plus ancienne a été faite à différentes reprises. (*Voir* la question **4663** *loc. cit.*)

Des solutions algébriques, sous une forme un peu différente, ont été obtenues, ou plutôt peuvent se déduire de celles que M. Weill a données dans un article de 1916 (*N. A.*, voir § III, p. 353; avec $a = b = 1$). H. Brocard.

Autre réponse de M. J. Pacé.

5036 (**1920**, 38) (Allan Cunningham). — *Factorisation de nombres.* — Corrigez une petite faute dans l'énoncé (5e ligne) :

$$T_\mu^2 + T_\rho^2 + 1 \quad \text{doit être} \quad T_\mu^2 + T_\rho^2 - 1.$$

Posez $T'_1 = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}\right)$, $U'_1 = \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right)$.

On a $T_1 = T'^2_1 + DU'^2_1$ et $U_1 = 2T'_1 U'_1$,

ce qui donne $T_1 = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $U_1 = \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Ces résultats se conforment à

$$T'^2_1 - DU'^2_1 = -1 \quad \text{et} \quad T^2 - DU^2 = +1.$$

En utilisant les formules connues de dérivation de T'_2, T'_3, ...; U'_2, U'_3, ...; T_2, T_3, ...; U_2, U_3, ... de T'_1, U'_1 et de T_1, U_1, à l'aide du multiplicateur $(T^2_1 - DU^2_1) = +1$ répété, on obtient (après réduction algébrique)

$$T'_2 = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x}\right), \qquad U'_2 = \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{1}{2}\left(e^{\frac{3}{2}x} + e^{-\frac{3}{2}x}\right),$$

$$T'_3 = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{5}{2}x} - e^{-\frac{5}{2}x}\right), \qquad U'_3 = \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{1}{2}\left(e^{\frac{5}{2}x} + e^{-\frac{5}{2}x}\right),$$

$$\dots\dots, \qquad \dots\dots,$$

$$T'_r = \frac{1}{2}\left[e^{\left(r-\frac{1}{2}\right)x} - e^{-\left(r-\frac{1}{2}\right)x}\right], \qquad U'_r = \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{1}{2}\left[e^{\left(r-\frac{1}{2}\right)x} + e^{-\left(r-\frac{1}{2}\right)x}\right];$$

aussi

$$T_2 = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}), \qquad U_2 = \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}),$$

$$T_3 = \frac{1}{2}(e^{3x} + e^{-3x}), \qquad U_3 = \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{1}{2}(e^{3x} - e^{-3x}),$$

$$\dots\dots, \qquad \dots\dots,$$

$$T_r = \frac{1}{2}(e^{rx} + e^{-rx}), \qquad U_r = \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{1}{2}(e^{rx} - e^{-rx}).$$

A l'aide de ces formules, on obtient (après réduction)

$$T'^2_\mu + T'^2_\rho + 1 = \frac{1}{4}\left[e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\right)x} - e^{-\left(\mu-\frac{1}{2}\right)x}\right]^2 + \frac{1}{4}\left[e^{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)x} + e^{-\left(\rho-\frac{1}{2}\right)x}\right]^2 + 1$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{(2\mu-1)x} + e^{-(2\mu-1)x} + e^{(2\rho-1)x} + e^{-(2\rho-1)x}\right],$$

et l'on obtiendra (après réductions) la même quantité pour

$$T_{\mu+\rho-1}\,T_{\mu-\rho}.$$

On a donc

(A) $$T'^2_{\mu} + T'^2_{\rho} + 1 = T_{\mu+\rho-1}\,T_{\mu-\rho}, \quad \ldots \qquad \text{(deux facteurs)}.$$

Pareillement, on obtiendra

$$T^2_{\mu} + T^2_{\rho} - 1 = \frac{1}{4}(e^{\mu x} + e^{-\mu x})^2 + \frac{1}{4}(e^{\rho x} + e^{-\rho x})^2 - 1$$
$$= \frac{1}{4}(e^{2\mu x} + e^{-2\mu x} + e^{2\rho x} + e^{-2\rho x}),$$

et l'on obtiendra (après réductions) la même quantité pour

$$T_{\mu-\rho}, \quad T_{\mu+\rho}.$$

On a donc

(B) $$T^2_{\mu} + T^2_{\rho} - 1 = T_{\mu-r}\,T_{\mu+r} \qquad \text{(deux facteurs)}.$$

Ensuite, posant $\mu = r$, $\rho = 1$ en l'équation (A),

$$T'^2_r + T'^2_1 + 1 = T_{r-1}\,T_r.$$

Donc

$$T'_2 + T'_1 + 1 = T_1 T_2 = L'_1 M'_1,$$
$$T'_3 + T'_1 + 1 = T_2 T_3 = L'_2 M'_2,$$
$$T'_4 + T'_1 + 1 = T_3 T_4 = L'_3 M'_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Voici la chaînette où $M'_1 = L'_2$, $M'_3 = L'_4$, ...

Ensuite, posant $\mu = r$, $\rho = 1$ en l'équation (B),

$$T^2_r + T^2_1 - 1 = T_{r-1}\,T_{r+1}.$$

Donc

$$T^2_2 + T^2_1 - 1 = T_1\,T_3,$$
$$T^2_4 + T^2_1 - 1 = T_3\,T_5,$$
$$T^2_6 + T^2_1 - 1 = T_5\,T_7,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Voici la chaînette où $M_1 = L_2$, $M_2 = L_3$, ...

Aussi

$$T^2_3 + T^2_1 - 1 = T_2\,T_4,$$
$$T^2_5 + T^2_1 - 1 = T_4\,T_6,$$
$$T^2_3 + T^2_1 - 1 = T_6\,T_8,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Voici la chaînette où $M_1 = L_2$, $M_2 = L_3$, ...

Posez

$$T'_1 = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}\right), \qquad U'_1 = \frac{1}{\sqrt{D}}\,\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}\right).$$

On a

$$T_1 = T'^2_1 + DU'^2_1 \quad \text{et} \quad U_1 = 2\,T'_1\,U'_1,$$

ce qui donne

$$T_1 = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \qquad U_1 = \frac{1}{\sqrt{D}}\,\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Ces résultats se conforment à

$$T'^2_1 - DU'^2_1 = -1 \quad \text{et} \quad T^2 - DU^2 = +1.$$

En utilisant les formules connues de dérivation de T'_2, T'_3, ...; U'_2, U'_3, ...; T_2, T_3, ...; U_2, U_3, ... de T'_1, U'_1 et de T_1, U_1, à l'aide du multiplicateur $(T^2_1 - DU^2_1) = +1$ répété, on obtient (après réduction algébrique)

$$T'_2 = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x}\right), \qquad U'_2 = \frac{1}{\sqrt{D}}\,\frac{1}{2}\left(e^{\frac{3}{2}x} + e^{-\frac{3}{2}x}\right),$$

$$T'_3 = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{5}{2}x} - e^{-\frac{5}{2}x}\right), \qquad U'_3 = \frac{1}{\sqrt{D}}\,\frac{1}{2}\left(e^{\frac{5}{2}x} + e^{-\frac{5}{2}x}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$T'_r = \frac{1}{2}\left[e^{\left(r-\frac{1}{2}\right)x} - e^{-\left(r-\frac{1}{2}\right)x}\right], \qquad U'_r = \frac{1}{\sqrt{D}}\,\frac{1}{2}\left[e^{\left(r-\frac{1}{2}\right)x} + e^{-\left(r-\frac{1}{2}\right)x}\right];$$

aussi

$$T_2 = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}), \qquad U_2 = \frac{1}{\sqrt{D}}\,\frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}),$$

$$T_3 = \frac{1}{2}(e^{3x} + e^{-3x}), \qquad U_3 = \frac{1}{\sqrt{D}}\,\frac{1}{2}(e^{3x} - e^{-3x}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$T_r = \frac{1}{2}(e^{rx} + e^{-rx}), \qquad U^r = \frac{1}{\sqrt{D}}\,\frac{1}{2}(e^{rx} - e^{-rx}).$$

A l'aide de ces formules, on obtient (après réduction)

$$\begin{aligned} T'^2_\mu + T'^2_\rho + 1 &= \frac{1}{4}\left[e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\right)x} - e^{-\left(\mu-\frac{1}{2}\right)x}\right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}\left[e^{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)x} + e^{-\left(\rho-\frac{1}{2}\right)x}\right]^2 + 1 \\ &= \frac{1}{4}\left[e^{(2\mu-1)x} + e^{-(2\mu-1)x} + e^{(2\rho-1)x} + e^{-(2\rho-1)x}\right], \end{aligned}$$

et l'on obtiendra (après réductions) la même quantité pour

$$T_{\mu+\rho-1}\,T_{\mu-\rho}.$$

On a donc

(A) $$T'^2_\mu + T'^2_\rho + 1 = T_{\mu+\rho-1}\,T_{\mu-\rho}, \quad \ldots \qquad \text{(deux facteurs)}.$$

Pareillement, on obtiendra

$$T^2_\mu + T^2_\rho - 1 = \frac{1}{4}(e^{\mu x} + e^{-\mu x})^2 + \frac{1}{4}(e^{\rho x} + e^{-\rho x})^2 - 1$$
$$= \frac{1}{4}(e^{2\mu x} + e^{-2\mu x} + e^{2\rho x} + e^{-2\rho x}),$$

et l'on obtiendra (après réductions) la même quantité pour

$$T_{\mu-\rho}, \quad T_{\mu+\rho}.$$

On a donc

(B) $$T^2_\mu + T^2_\rho - 1 = T_{\mu-r}\,T_{\mu+r} \qquad \text{(deux facteurs)}.$$

Ensuite, posant $\mu = r$, $\rho = 1$ en l'équation (A),

$$T'^2_r + T'^2_1 + 1 = T_{r-1}\,T_r.$$

Donc

$$T'_2 + T'_1 + 1 = T_1 T_2 = L'_1 M'_1,$$
$$T'_3 + T'_1 + 1 = T_2 T_3 = L'_2 M'_2,$$
$$T'_4 + T'_1 + 1 = T_3 T_4 = L'_3 M'_3,$$
. . . .

Voici la chaînette où $M'_1 = L'_2$, $M'_3 = L'_4$, ...

Ensuite, posant $\mu = r$, $\rho = 1$ en l'équation (B),

$$T^2_r + T^2_1 - 1 = T_{r-1}\,T_{r+1}.$$

Donc

$$T^2_2 + T^2_1 - 1 = T_1\,T_3,$$
$$T^2_4 + T^2_1 - 1 = T_3\,T_5,$$
$$T^2_6 + T^2_1 - 1 = T_5\,T_7,$$
. . . .

Voici la chaînette où $M_1 = L_2$, $M_2 = L_3$, ...

Aussi

$$T^2_3 + T^2_1 - 1 = T_2\,T_4,$$
$$T^2_5 + T^2_1 - 1 = T_4\,T_6,$$
$$T^2_3 + T^2_1 - 1 = T_6\,T_8,$$
. . . .

Voici la chaînette où $M_1 = L_2$, $M_2 = L_3$, ...

On peut former une infinité de telles chaînettes avec les formules

$$N'_r = T'^2_r + T'^2_\alpha + 1, \qquad N_r = T^2_r + T^2_\alpha - 1,$$

dans lesquelles r est variable et α constant.

ALLAN J.-C. CUNNINGHAM.

I. Soit

$$cx^2 - dy^2 = k = cx'^2 - dy'^2$$

et c premier avec d, d'où

$$c = c_1 c_2, \quad x - x' = d_1 ef, \quad x + x' = d_2 gh,$$
$$d = d_1 d_2, \quad y - y' = c_1 eg, \quad y + y' = c_2 fh,$$
$$x = \frac{1}{2}(d_1 ef + d_2 gh), \qquad y' = \frac{1}{2}(c_2 fh - c_1 eg),$$
$$cx^2 + dy'^2 = \frac{1}{4}(c_1 d_1 e^2 + c_2 d_2 h^2)(c_2 d_1 f^2 + c_1 d_2 g^2),$$

ce qui fournit la décomposition demandée.

II. Dans le cas spécial de la question, soient a, b les plus petits nombres satisfaisant à l'équation

$$a_n^2 - Db_n^2 = (-1)^n;$$

on a généralement, comme on sait,

$$a_n = \frac{1}{2}\left[(a + b\sqrt{D})^n + (a - b\sqrt{D})^n\right],$$
$$b_n = \frac{1}{2\sqrt{D}}\left[(a + b\sqrt{D})^n - (a - b\sqrt{D})^n\right];$$

on en déduit aisément

$$a_{n-k} a_k + D b_{n-k} b_k = a_n,$$
$$b_{n-k} a_k + a_{n-k} b_k = b_n;$$

et, en remarquant que $a_k^2 - Db_k^2 = (-1)^k$,

$$a_{n-k} a_k - D b_{u-k} b_k = (-1)^k a_{n-2k},$$
$$b_{n-k} a_k - a_{n-k} b_k = (-1)^k b_{n-2k}.$$

On a donc

$$a_n^2 + a_{n-2k}^2 - (-1)^n = a_n^2 + Db_{n-2k}^2$$
$$= (a_{n-k}^2 + D b_{n-k}^2)(a_k^2 + D b_k^2),$$

et en particulier, d'accord avec l'énoncé,

$$a^2_{2k+1} + a^2_1 + 1 = (a^2_{k+1} + D b^2_{k+1})(a^2_k + D b^2_k),$$
$$a^2_{2k+1} + a^2_2 - 1 = (a^2_{k+2} + D b^2_{k+2})(a^2_k + D b^2_k).$$

Remarque. — Il existe des décompositions directes semblables pour toutes les valeurs de D ; on les trouve facilement en remarquant que toutes les solutions de

$$x_n^2 - D y_n^2 = 1$$

sont données par

$$x_n = \frac{t^n}{2^{n+1}} \left[(a\sqrt{d_1} + b\sqrt{d_2})^{2n} + (a\sqrt{d_1} - b\sqrt{d_2})^{2n} \right],$$

$$y_n = \frac{t^n}{2^{n+1}\sqrt{D}} \left[(a\sqrt{d_1} + b\sqrt{d_2})^{2n} - (a\sqrt{d_1} - b\sqrt{d_2})^{2n} \right],$$

avec

$$D = d_1 d_2, \qquad t = 1 \text{ ou } 2 \qquad \text{et} \qquad d_1 a^2 - d_2 b^2 = \frac{2}{t}.$$

L. AUBRY.

5037 (**1920**, 39) (T. LEMOYNE). — *Courbes du septième degré.* — Des exemples de courbes du septième degré ont été donnés déjà ici, mais très sommairement, dans des réponses à la question **1195** relative aux courbes de degré impair (*voir* **1898**, 138; **1900**, 278).

J'ai reconnu, dans la suite, que j'avais oublié de mentionner une étude de P.-H. Schoute, de 1883, intitulée : *Over eene bizzondere ruinstakourven van den zevenden graad* (*Sur une courbe particulière du septième degré*) (12 p., 5 fig.).

Depuis, j'ai reçu de Barisien l'annonce (datée du 26 avril 1909) d'une autre courbe du septième degré, qu'il venait de rencontrer, et qui serait l'enveloppe des cordes de longueur constante inscrites dans une parabole.

Cette description très simple mériterait d'être vérifiée.

Le nombre des courbes du septième degré est encore aujourd'hui des plus restreints, et je n'en ai plus d'autres à indiquer.

H. BROCARD.

Voici un exemple de lieu géométrique donnant une courbe du septième ordre :

On considère les coniques S *circonscrites à un triangle donné* ABC *et telles que les normales aux sommets* A, B, C *concourent en un même point* P. *Le lieu du pied de la quatrième normale*

à la conique, issue de P, *se compose de la circonférence* ABC, *des droites* BC, CA, AB *et d'une courbe du septième ordre* (G. Darboux, *N. A.*, 1867, p. 510). V. Thébault.

Voici un mode de génération très général de lieux d'ordre r.

Remarquons d'abord que, d'après les identités de Plücker, un nombre r, autre que 1, 2, 3 ou 5, peut toujours être décomposé en une somme $p+q$ ou $2p+q$, où p et q sont l'ordre et la classe d'une même courbe algébrique

$$(r = 4 \text{ ou } \geqq 6 \quad \text{pour} \quad r = p+q,$$
$$r = 6 \text{ ou } \geqq 9 \quad \text{pour} \quad r = 2p+q).$$

Cela posé, soit une courbe d'ordre p et de classe q, et deux faisceaux homographiques (de sommets distincts ou confondus) :

1° Le lieu des intersections des rayons du premier faisceau avec les tangentes à la courbe, aux points où elle est coupée par les rayons homologues du second faisceau, est une courbe d'ordre $r=p+q$ et de classe $3q$, dont q branches passent par le sommet du premier faisceau.

2° En remplaçant les tangentes par les normales, on a une courbe d'ordre $r=2p+q$ et de classe $2p+3q$, dont $p+q$ branches passent par le sommet du premier faisceau.

Pour $r=7$, on prendra donc la première définition ci-dessus, avec, pour courbe de base, une cubique nodale ou une quartique tricuspidale.

Ces deux modes de génération ne sont pas applicables au cas où $r=5$. Pour obtenir des quintiques, on peut, d'une façon tout à fait analogue, prendre les intersections de droites passant par un point fixe avec *deux* tangentes à une courbe de troisième classe leur correspondant d'une façon convenable.

Exemples :

I. Le lieu des intersections de droites passant par un point fixe, avec les droites de Simson des points où elles coupent le cercle circonscrit à un triangle, est une quintique unicursale ayant un point triple au point donné, et un point double en chaque sommet du triangle podaire de ce point.

II. Soit N une normale à une parabole. Le lieu des intersections d'une droite passant par son pôle, avec les deux normales issues du pôle de cette droite (et autres que la normale N sur laquelle il se trouve), est une quintique ayant un point triple au pôle de N, et un point double aux deux points où N coupe la parabole.

P. Hendlé.

5038 (**1920**, 39) (T. Lemoyne). — *Lieux géométriques du septième degré.* — Voici trois exemples, probablement nouveaux, rencontrés dans l'étude des lieux de foyers de coniques tangentes à trois droites :

Si l'on considère, parmi les coniques tangentes à trois droites, celles dont un foyer est le centre de gravité des intersections de l'axe focal avec ces trois droites, le lieu de ce foyer est une courbe du septième ordre.

Parmi les coniques qui sont tangentes à trois droites, il y en a une infinité qui sont telles que la polaire de leur centre, par rapport à ces trois droites, contienne un foyer; le lieu de ce foyer est une courbe du septième ordre.

Si l'un des foyers d'une conique variable inscrite à un triangle reste collinéaire avec un point fixe et le point de Gergonne de la conique, le lieu de ce foyer est une courbe du septième ordre.

Nous n'avons pu obtenir de décomposition des équations de ces trois lieux géométriques. R. Goormaghtigh.

5040 (**1920**, 39) (G. Métrod). — *Relation d'Euler dans les polyèdres.* — D'après un passage de l'énoncé, il est fait allusion à la question de savoir si la relation d'Euler

$$S + F = A + 2,$$

entre les nombres de sommets, de faces et d'arêtes, est applicable à un polyèdre quelconque.

Je ne puis mieux faire que de signaler à ce sujet une sorte d'étude *expérimentale* de la construction et de la modification de polyèdres comme on les réaliserait matériellement dans un atelier de menuiserie.

Cet exercice pratique, intéressant et instructif, est dû à M. E. Weill, et intitulé : *Quelques remarques sur le théorème d'Euler concernant les polyèdres* (*N. A.*, 1898, p. 120-128; 7 fig.).

L'auteur ajoute que la démonstration donnée dans cet article a été inspirée par la lecture du Chapitre IV du *Traité sur les fonctions algébriques et leurs intégrales*, de MM. Appell et Goursat.

H. Brocard.

5041 (**1920**, 40) (Howarth). — *Propriété des fractions $\frac{1}{p}$, p premier.* — Soit a un nombre quelconque, premier ou composé, et formé de n chiffres.

a sera la période du quotient $\frac{1}{p}$ (p premier) et la fraction génératrice de $\frac{1}{p}$ sera, par définition, $\frac{a}{[999\ldots9]_n}$, n étant le nombre de chiffres 9.

En d'autres termes, tout groupe de n chiffres 9, ou plus simplement de n chiffres 1, divisé par un nombre premier p, fournira un quotient fini; autrement dit, la division s'arrêtera de toute façon.

Cette propriété des nombres $[111\ldots1]_n$ est bien connue des arithmologues. Elle est fondamentale dans l'étude de ces nombres. *Voir*, à ce sujet, ma réponse (**1895**, 323) à la question 57 (**1894**, 22).

Il s'agit, en définitive, du théorème de Plateau, savoir : *Tout nombre impair quelconque, non terminé par* 5, *divise nécessairement un nombre* $(n)_1$ *de* n *chiffres* 1.

J'ai rappelé (*loc. cit.*) d'autres propriétés qui s'y rapportent, et dont le détail entraînerait trop loin.

Je résumerai seulement les références à : **1895**, 323; **1900**, 51; **1903**, 183; **1907**, 250.

Voir aussi les questions analogues **3617** et **3618** :

3617 : **1909**, 219; **1910**, 70, 136, 227.
3618 : **1909**, 219; **1910**, 71, 203, 228, 286.

Enfin, tout récemment, M. Petrovitch y a fourni une nouvelle contribution : *Propriétés arithmétiques d'une classe de nombres rationnels* (*S. M.*, 1920, p. 27-32).

H. Brocard.

Il faut et il suffit que $n = p - 1$, ou $n = (p - 1) : \nu$ (c'est-à-dire facteur de $p - 1$). Or, on peut toujours trouver un nombre premier p tel que $p = n + 1$, ou $p = n\nu + 1$.

A. Cunningham.

5051 (**1920**, 60) (A. Gérardin). — *Recherche des nombres c de la forme* $8l + 7$ *qui sont de plusieurs façons de la forme* $x^3 - y^2$, *avec x impair.* — M. Gérardin cite pour c les valeurs 207, 847, 1727 et demande si d'autres nombres répondent aux conditions indiquées; voici des exemples, pour lesquels on a encore $l = 5k$:

$$6687 = 8.835 \quad + 7 = 31^3 - 152^2 = 27^3 - 114^2,$$
$$296407 = 8.37050 + 7 = 71^3 - 248^2 = 67^3 - \ 66^2.$$

De tels exemples s'obtiennent par une méthode simple *en principe :* on écrit sous forme d'une différence de deux carrés la différence $x^3 - x'^3$ des cubes d'un nombre de la forme $8n + 7$ et d'un nombre de forme $8n + 3$, en utilisant la décomposition de $x^3 - x'^3$ en facteurs. *En pratique,* beaucoup de cas ne donneront pas de

solution, car le plus grand carré trouvé peut être supérieur à x^3. C'est pourquoi, dans chacun des exemples que nous citons, on a choisi des cubes x^3 et x'^3 peu différents. R. GOORMAGHTIGH.

5054 (1920, 61) (F. BALITRAND). — *Égalité des arcs correspondants d'une parabole et d'une campyle d'Eudoxe.* — Cette proposition est un cas particulier du théorème classique relatif à l'égalité des arcs correspondants de la courbe de Mannheim (M) et de la radiale (R) d'une même courbe (Γ); ici (Γ) est une chaînette de paramètre a. Pour démontrer la proposition visée, il suffira d'établir qu'un rayon mené de l'origine O coupe les deux courbes données (M) et (R) en deux points N et N' qui, dans la génération de ces courbes, correspondent au même point N_1 de (Γ). Or la base de la parabole, considérée comme courbe de Mannheim, est la droite $y + a = 0$, qui rencontre Oy en un point Q; si P est la projection de N sur cette droite, le trapèze ONPQ est superposable à celui qui a pour côtés la base Δ de (Γ), la normale et la tangente en N_1 à (Γ) et la perpendiculaire menée à cette tangente par la projection de N_1 sur Δ. Il en résulte que l'angle de ON avec Ox est égal à l'angle de contingence de la chaînette (Γ) en N_1, ce qui démontre la propriété.

R. GOORMAGHTIGH.

Cette proposition résulte de ce fait connu que la campyle d'Eudoxe

$$x^4 = a^2(x^2 + y^2)$$

et la parabole

$$y^2 = a(x - a)$$

sont, la première la *base*, et la seconde la *roulante*, dans le mouvement d'un angle droit dont un côté passe par l'origine et dont un point du second côté, à une distance a du sommet, parcourt l'axe des x.

(*Voir* CRELIER, *Systèmes cinématiques*, collection *Scientia*, n° 31.)

P. HENDLÉ.

5062, 5063 (1920, 85) (P. MOREL). — *Lieu des foyers de coniques normales à des droites données.* — Si les caractéristiques d'un système de coniques sont (μ, ν), le lieu des foyers est une courbe d'ordre 3ν (Salmon, *Sections coniques*, Notes).

En se rappelant que d'être normale à une droite est pour une conique du système une condition (1, 1), on forme, pour les nombres (p, t, n) de coniques passant par p points, tangentes à t droites et normales à n droites, le Tableau suivant :

TABLEAU I.

(4, 0, 1) = 3	(3, 0, 2) = 9	(2, 0, 3) = 23	(1, 0, 4) = 51	(0, 0, 5) =
(3, 1, 1) = 6	(2, 1, 2) = 14	(1, 1, 3) = 28	(0, 1, 4) = 51	
(2, 2, 1) = 8	(1, 2, 2) = 14	(0, 2, 3) = 23		
(1, 3, 1) = 6	(0, 3, 2) = 9			
(0, 4, 1) = 3				

Tenant compte alors de ce que le contact avec une conique fixe est pour une conique du système une condition (2, 2), on déduit du Tableau I ci-dessus qu'il y a 102 coniques normales à trois droites données, et tangentes à une conique donnée et à une droite donnée.

On conclut de ce qui précède que les nombres 306 et 153 trouvés par M. P. Morel sont strictement conformes à la théorie des caractéristiques de Chasles. ***Mais la formule fondamentale de cette théorie n'est pas toujours exacte***, comme l'a montré Halphen (voir *I. M.*, **1917**, 82, question **3115**), qui a donné le moyen de la corriger. En ce qui concerne les conditions de normalité à un certain nombre de droites, le Tableau I ci-dessus doit être remplacé par celui du Dr Wiman, publié dans l'*I. M.* (**1899**, 141, question **1398**). Je le reproduis ci-après, avec la correction que j'ai indiquée ici-même (**1916**, 222, question **4694**).

TABLEAU II.

(4, 0, 1) = 3	(3, 0, 2) = 9	(2, 0, 3) = 22	(1, 0, 4) = 42	(0, 0, 5) =
(3, 1, 1) = 6	(2, 1, 2) = 14	(1, 1, 3) = 26	(0, 1, 4) = 33	
(2, 2, 1) = 8	(1, 2, 2) = 14	(0, 2, 3) = 19		
(1, 3, 1) = 6	(0, 3, 2) = 9			
(0, 4, 1) = 3				

Il en résulte qu'il n'y a que 90 coniques (au lieu de 102) normales à trois droites données et tangentes à une conique donnée et à une droite donnée. Nous possédons maintenant tous les éléments nécessaires pour répondre exactement aux deux questions posées par M. P. Morel :

Le lieu des foyers des coniques qui sont normales à trois droites données et sont tangentes à une conique donnée est une courbe du 270e ordre.

Le lieu des foyers des coniques normales à quatre droites données est une courbe du 99e ordre.

P. Hendlf.

L'INTERMÉDIAIRE

DES

MATHÉMATICIENS

FONDÉ EN 1894 PAR C.-A. LAISANT ET ÉMILE LEMOINE

DIRECTEURS-RÉDACTEURS

Ed. MAILLET
Docteur ès sciences
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées
Examinateur à l'École Polytechnique

A. BOULANGER
Directeur des Études
à l'École Polytechnique

J. LEMAIRE
Professeur au Lycée Janson de Sailly
Répétiteur à l'École Polytechnique

Publication honorée d'une souscription du Ministère de l'Instruction publique

TOME XXVII. — 1920

TABLE DES MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS

PARIS

GAUTHIER-VILLARS et C^{ie}, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1920

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS et Cie.

55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, PARIS (6e)

Tous les Prix marqués sont nets

APPELL (Paul), Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences de Paris. — **Eléments d'Analyse mathématique** *à l'usage des candidats aux certificats de mathématiques générales, des ingénieurs et des physiciens.* Cours professé à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures. In-8 (25-16) de x-716 pages. 4e édition; 1921 .... 65 fr.

BOYER (J.). — **Histoire des Mathématiques.** In-8 (23-14) de 260 pages avec 34 figures et gravures hors texte, 1900 .... 19 fr.

CONTENSON (Louis de), Ingénieur E. C. P. — **La Certitude mathématique. — Les fondements mathématiques dans l'hypothèse de la philosophie critique (système cartéso-kantien).** In-8 (25-16) de 96 pages; 1914 .... 6 fr. 50

GOURSAT (Édouard), Professeur à la Faculté des Sciences. — **Cours d'Analyse** de la Faculté des Sciences de Paris. 3 volumes in-8 (25-16), se vendant séparément.

Tome I : *Dérivées et différentielles, Intégrales définies. Développements en série. Applications géométriques.* 3e édition, revue et augmentée. Volume de vi-668 pages, avec 44 figures; 1917.... 50 fr.

Tome II : *Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles.* 3e édition entièrement refondue. Volume de vi-670 pages, avec 39 figures; 1918 .... 48 fr.

Tome III : *Intégrales infiniment voisines. Équations aux dérivées partielles du second ordre. Équations intégrales. Calcul des variations.* (*Sous presse.*)

JORDAN (Camille), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique. — **Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.** 3 volumes in-8 (23-14), avec figures, se vendant séparément :

Tome I. — *Calcul différentiel;* 3e édition, 1909 .... 34 fr.

Tome II. — *Calcul intégral (Intégrales définies et indéfinies)*; 3e édition revue et corrigée; 1913 .... 40 fr.

Tome III. — *Calcul intégral (Equations différentielles)*; 3e édition revue et corrigée; 1915 .... 30 fr.

LAISANT (C.-A.), Répétiteur à l'École Polytechnique, Docteur ès sciences. — **La Mathématique.** Philosophie. Enseignement. 2e édition, revue et corrigée. In-8 (23-14) de vii-244 pages, avec 5 figures, cartonné; 1907 .... 10 fr.

LAURENT (H.), Examinateur à l'École Polytechnique. — **Cours de Mathématiques**, professé à l'*Institut agronomique.* In-8 (23-14) de 218 pages, avec 32 figures, cartonné à l'anglaise 1900......... 14 fr.

TABLE DES QUESTIONS ET RÉPONSES.

Chacune des questions parues dans le Tome XXVII porte le numéro d'ordre avec lequel elle a été publiée. Les autres nombres de la Table indiquent les pages du Volume.

Questions posées.	Question	Page(s).	Réponses. Page(s).
Tome VI (1899).	1493.	98	Tome XXVII. 41.
Tome VIII (1901).	2040.	59	Tome XXVII. 111.
	2162.	219	41.
Tome IX (1902).	2258.	4	Tome XXVII. 111.
	2375.	170	42.
Tome X (1903).	2535.	65	Tome XXVII. 43.
	2600.	152	43.
Tome XIV (1907).	3288.	220	Tome XXVII. 112.
Tome XV (1908).	3474.	272	Tome XXVII. 44, 112.
Tome XVIII (1911).	1493.	27	Tome XXVII. 41.
	3937.	242	44.
Tome XIX (1912).	4133.	266	Tome XXVII. 45.
Tome XX (1913).	4165.	6	Tome XXVII. 113.
	4188.	74	113.
Tome XXI (1914).	4429.	169	Tome XXVI. 45.
Tome XXII (1915).	4545.	171	Tome XXVII. 89.
	4557.	195	137.
Tome XXIII (1916).	4557.	134	Tome XXVII. 137.
	4639.	97	46, 89.
	4680.	220	47.

Questions posées. Tome XXIV (1917).	Page.	Réponses Tome XXVII. Page.
4727.	30	90

Tome XXV (1918).	Pages.	Tome XXVII. Pages.
4557.	105	137.
4792.	2	48.
4810.	7	113.
4843.	74	50, 114.
4846.	74	114.
4859.	98	51.

Tome XXVI (1919).	Pages.	Tome XXVII. Pages.
4859.	28	51.
4870.	122	52.
4886	3	11.
4888.	3	53.
4890.	4	115.
4893.	5	91.
4903.	35	53.
4905.	35	16, 119.
4907.	36	54.
4910.	37	119, 137.
4911.	37	63.
4912.	37	17.
4916.	38	120.
4919.	65.	18.
4927.	69.	18.
4930.	71	91.
4932.	72	120.
4933.	72	19, 91.
4935.	73	65, 138.
4938.	74	21.
4939.	74	24.
4941.	97	65.
4947.	99	92.
4948.	99	24, 121.
4951.	100	25.
4954.	100	66.
4955.	100	25, 138.
4958.	102	25.
4960.	103	26.
4961.	103	27.
4962.	103	28.
4963.	103	28, 139.
4964.	104	30, 95.
4965.	104	31.
4966.	104	32, 97.
4967.	129	67.
4968.	129	67, 121.
4972.	131	68, 121.
4973.	131	97.
4975.	132	69.
4976.	133	72.
4978.	161	72.
4979.	161	73.
4981.	162	74, 98.
4982.	162	99.
4983.	162	74.
4985.	163	74.
4986.	164	100.
4988.	165	75.
4990.	166	78.
4991.	166	100.
4993.	167	78.
4995.	168	101.
4998.	170	78.
4999.	170	79.
5000.	170	123.

Questions posées. Tome XXVII (1920).	Pages.	Réponses. Tome XXVII. Pages.
5002.	2	123.
5005.	3	124.
5006.	3	124.
5008.	4	101.
5009.	4	124.
5015.	6	125.
5019.	7	125.
5021.	8	126.
5024.	8	126.
5026.	9	126.
5027.	9	127.
5028.	33	127.
5030.	33	141.
5036.	38	143.
5037.	39	147.
5038.	39	149.
5040.	39	120, 149.
5041.	40	149.
5051.	60	150.
5054.	61	151.
5062.	85	151.
5063.	85	151.

Rappel de questions non résolues antérieurement et reproduites au Tome XXVII (1920).

Tome IX (1902).	Pages.	Tome XXVII. Pages.
2412.	227	9.
2423.	229	9.
2425.	230	9.
2431.	258	10

TABLE DES QUESTIONS

CLASSÉES SUIVANT LES DIVISIONS DE L'INDEX DU RÉPERTOIRE BIBLIOGRAPHIQUE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

La Table qui suit fait connaître le sujet général des différentes questions proposées.

Les nombres de cette Table sont les *numéros* des questions auxquelles se rapporte la division de l'Index du Répertoire.

La lettre Σ désigne les sujets de recherches ou d'études pour lesquels une subdivision spéciale a été adoptée dans l'*Intermédiaire* (*voir* t. II, 1895, p. 177).

TABLE PAR NOMS D'AUTEURS

Les noms inscrits sont exclusivement ceux des auteurs de questions ou de réponses.

L'*italique* désigne les pseudonymes.

Les chiffres ordinaires indiquent les numéros des pages et se rapportent aux QUESTIONS POSÉES ; avec astérisque, ils désignent le rappel des questions au moment de la publication des réponses.

Les **caractères gras** sont réservés aux RÉPONSES annoncées ou publiées dans le texte.

Les Tables précédentes ont été rédigées, cette année, par M. J. Lemaire, et vérifiées par M. A. Boulanger.

La Rédaction.

ERRATA.

TOME XXVI (1919).

Page 84, ligne 5, *au lieu de* $u - p = v$, *lire* $u - p = -v$; *au lieu de* $w = 2t$, *lire* $w = -2t$.

Page 146, ligne 10, à la suite de l'expression écrite, *lire* pour d diviseur de n et $< n$; ligne 7 en remontant, *supprimer* la parenthèse du dénominateur.

Page 151, ligne 13, *au lieu de* $b^2 + 2b^2 = 3d^2 \equiv 0$, *lire* $b^2 + 2d^2 = 3v^2 \equiv 0$.

Page 152, ligne 13, *au lieu de* $a^2(f^2 + g^2)$, *lire* $h^2(f^2 + g^2)$; ligne 14, *au lieu de* $\sqrt{qe^2g^2 - 2(f^2 + g^2)^2}$, *lire* $\sqrt{9f^2g^2 - 2(f^2 + g^2)^2}$; ligne 17, *au lieu de* $k^2 = 9e^2g^2 \ldots$, *lire* $k^2 = 9f^2g^2$.

Page 162, lignes 3 et 6 en remontant, *ajouter* $= 0$.

TOME XXVII (1920).

Page 39, ligne 18, *au lieu de* $m^n C_m^m$, *lire* $m^n C_m^w$.

Page 42, ligne 2, *au lieu de* $a - y\sqrt{}$, *lire* $a - y - \sqrt{}$.

Page 52, ligne 17, *au lieu de* (**1919**, 122), *lire* (**1918**, 122).

Page 62, ligne 10, *au lieu de* Langel, *lire* Laugel.

Page 74, ligne 6, en remontant, *au lieu de* A. Sebban, *lire* H. Sebban.

Page 87, ligne 1, *au lieu de* $y_n y'_n$, *lire* y_n, y'_n.

Page 89, ligne 9 en remontant, *au lieu de* divergente, *lire* divergence.

Page 98, ligne 8, *au lieu de* Collucci, *lire* Colucci.

Page 102, ligne	2,	*au lieu de*	I,	*lire*	I_1,
»	5,	»	OH,	»	OM,
»	14,	»	ρ,	»	P,
»	15,	»	M,	»	m,
»	16,	»	$\frac{1}{OM}$,	«	$\frac{1}{Om}$,
»	17,	»	$O\rho$,	»	OP,
»	18,	»	$\rho\mu$, $\rho\gamma$,	»	$P\mu$, $P\gamma$,
»	19,	»	$\rho g'$,	»	Pg'.

Page 103, ligne 21, *au lieu de* et inscrite, *lire* et conjuguée.

Page 132, ligne 1, en remontant, *au lieu de* $1 + n^{2-4}$, *lire* $1 + n 2^{n-4}$.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^ie,
67805 Quai des Grands-Augustins, 55.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

Tous les prix marqués sont nets

LA VALLÉE-POUSSIN (Ch.-J. de), Professeur à l'Université de Louvain, Membre de l'Académie royale de Belgique. Correspondant de l'Institut de France — **Cours d'Analyse infinitésimale.** 2 vol. in-8 (25-16).

Tome I : 4e édition considérablement remaniée. Volume de XII-436 p. avec 11 figures; 1921 .... 35 fr.

Tome II : 4e édition considérablement remaniée. Volume de XVI-478 pages; 1922 .... 35 fr.

LUCAS (Édouard), Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Saint-Louis. — **Récréations mathématiques.** 4 volumes in-8 (21-15), caractères elzévirs, titres en deux couleurs, se vendant séparément.

Tome I. — *Les Traversées. — Les Ponts. — Les Labyrinthes. — Les Reines. — Le Solitaire. — La Numération. — Le Baguenaudier. — Le Taquin.* 2e édition; 1891. Prix : Papier hollande, 24 fr. — Vélin, 15 fr.

Tome II. — *Qui perd gagne. — Les Dominos. — Les Marelles. — Le Parquet. — Le Casse-tête. — Les Jeux de demoiselles. — Le Jeu icosien d'Hamilton.* 2e éd.; 1893. Prix : Papier hollande, 24 fr. — Vélin, 15 fr.

Tome III. — *Le Calcul digital. — Machines arithmétiques. — Le Caméléon. — Les Jonctions de points. — Le Jeu militaire. — La Prise de la Bastille. — La Patte d'oie. — Le Fer à cheval. — Le Jeu américain. — Amusements par les jetons. — L'Etoile nationale. — Rouge et Noire;* 1893. Prix : Papier hollande, 19 fr. — Vélin, 13 fr.

Tome IV et dernier. — *Le Calendrier perpétuel. — L'Arithmétique en boules — L'Arithmétique en bâtons. — Les Marelles au* XIIIe *siècle. — Les Carrés magiques de Fermat. — Les Réseaux et les dominos. — Les Régions et les quatre couleurs. — La Machine à marcher.* — Prix : Papier hollande, 24 fr. — Vélin, 15 fr.

NIEWENGLOWSKI (B.), Docteur ès Sciences, ancien Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand, Inspecteur de l'Académie de Paris. — **Cours de Géométrie analytique**, à l'usage des Elèves de la Classe de Mathématiques spéciales et des Candidats aux Ecoles du Gouvernement. 3 vol. gr. in-8, avec nombr. fig., se vendant séparément.

Tome I : *Sections coniques.* 2e édition. Un volume de VI-496 pages, avec 120 figures; 1911 .... 20 fr.

Tome II : *Constructions des courbes planes. Compléments relatifs aux coniques. Courbes définies par des équations différentielles.* 2e édition. Un volume de IV-328 pages, avec 180 figures; 1911 .... 18 fr.

Tome III : *Géométrie dans l'espace* (avec une Note de M. E. Borel, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Lille, *Sur les Transformations en Géométrie*). Vol. de VI-608 p., avec 43 fig.; 1914. 28 fr.

OCAGNE (Maurice d'), Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Professeur à l'Ecole Polytechnique. — **Cours de Géométrie pure et appliquée de l'Ecole Polytechnique.** 2 vol. in-8 (25-16) se vendant séparément.

Tome I : *Transformations géométriques. Perspective. Géométrie infinitésimale. Géométrie réglée. Géométrie cinématique.* Volume de XII-375 p. avec 135 figures; 1917 .... 32 fr.

Tome II : *Cinématique appliquée. Stéréotomie. Statique graphique. Calcul graphique. Calcul grapho-mécanique. Nomographie.* Volume de IV-364 pages, avec 170 figures; 1918 .... 30 fr.